

MATEMATICAS



MÓDULO 2

“APLICACIÓN PRÁCTICA DE LA GEO-TRIGONOMETRÍA Y FÍSICA”.

“Aplica y desarrolla habilidades prácticas en el cálculo de operaciones Geo-trigonométricas, físicas y estadísticas dentro su contexto mediante la interpretación de fórmulas”.

NIVEL : SECUNDARIA

CICLO : APRENDIZAJES ESPECIALIZADOS

ORURO – BOLIVIA

Módulo para Educación Secundaria de Personas Jóvenes y Adultos

Módulo No.2

**APLICACIONES PRÁCTICAS DE LA
GEO-TRIGONOMETRIA ESTADISTICA Y FISICA**

Ciclo de Aprendizajes Especializados

ELABORACIÓN DEL MODULO

CETHA SOCAMANI

Augusto Eliazar Villca Vásquez

Florencio Tangara

CETHA SALINAS

Limberth Ayca

CETHA CARACOLLO

Judith Céspedes Olivera

Felicidad Calizaya Gallardo

Julia Céspedes Olivera

CEA POOPO

Roger Ramiro Vizalla Chila

CEA BOLIVIA HOLANDA

Bertha Ticona Condori

CETHA 21 DE SEPTIEMBRE

Marcelino Efraín Bustos Cáceres

REVISION

René Ticona A

Equipo Nacional – RED FERIA

2009

Comisión Episcopal de Educación
Facilitadores de Educación Rural Integral Alternativa.

Auspiciado por: Broederlijk Delen

Coordinadora Regional de FERIA - Oruro

Dirección:

Calle Potosí, No. 814, Tel: 2409000

Email: feria@redferia.org – www.redferia.org

La Paz – Bolivia/2008

PRESENTACIÓN

Estimados (as) participantes:

Con el deseo de facilitar la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática y la física, te ofrecemos este Módulo en dos partes uno que pertenece al área de la Matemática y el otro a la Física.

En la primera parte te ofrecemos. Unidades de medida, el Álgebra, ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas, que corresponden al medio común y en la segunda parte te presentamos la geometría plana

Para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría, la física, y la estadística te ofrecemos este módulo correspondiente al medio superior.

En este módulo encontrarás en una primera parte la geometría plana, la trigonometría, en una segunda parte encontrarás contenidos de física como hidrostática estática y la electricidad y finalmente estudiaremos estadística.

¡Adelante!

COMPETENCIA GENERAL

“Aplica y desarrolla habilidades prácticas en el cálculo de operaciones Geo-trigonométricas, físicas y estadísticas dentro su contexto mediante la interpretación de fórmulas”.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO DEL MÓDULO

Recuerda seguir paso a paso las indicaciones del módulo, empezando a comprender la competencia general que tiene el módulo, que es el propósito que perseguimos, luego comprende las competencias e indicadores de cada unidad didáctica antes de ingresar a su estudio pleno.

Luego de leer y comprender las competencias piensa de qué se podría tratar el contenido intenta recordar algunas fórmulas o conceptos que conoces escribiendo en tu cuaderno.

Responde a las preguntas planteadas al inicio de cada tema, luego lee y comprende los conceptos relacionándolos con tu entorno.

Realiza las actividades que se te piden, practica los ejercicios para recordar fórmulas y practica la autoevaluación luego de concluir cada unidad temática.

Cualquier duda no dudes en preguntar a tu facilitador/a, investiga en libros, también puedes ayudar y hacerte ayudar con tus compañeros/as, entre varios se puede comprender mejor un tema.

Finalmente celebra compartiendo y aplicando lo que has aprendido.

Sigue adelante!!!!.

INDICE

MATEMÀTICAS

I.- GEOMETRIA PLANA

- Figuras Geométricas
- Cálculo de área y volúmenes
- Lectura y representación de escalas

II.- TRIGONOMETRIA

- Introducción
- Teorema de Pitágoras
- Funciones Trigonométricas
- Ley de los senos y cósenos
- Resolución de problemas

FISICA

III.- ESTÁTICA

- Máquinas Simples
- Vectores resolución de problemas

IV.- ELECTRICIDAD

- Unidades de medida de la electricidad
- Tipos de conductores
- Instalaciones domiciliarias

V.- HIDROSTÁTICA

- La presión
- Principios de Pascal
- Principios de Arquímedes

ESTADÍSTICA

VI.- ESTADÍSTICA

- La media aritmética
- La mediana
- La moda
- Desviación media y Standard

UNIDAD I

INTRODUCCIÓN A LAS FÍGURAS GEOMÉTRICAS

INDICADOR

Conoce y resuelve problemas prácticos del cálculo de áreas y volúmenes dentro su entorno

MEDICIÓN DE LONGITUDES:



Nuestra madre nos encarga que le compremos un maso de flores igual al otro de casa. Entonces nos dice que midamos con un cordel la altura y la anchura del maso para asi no llevar el pesado maso.

Como tampoco quiero llevar el cordel lo que hago es llevar mi mano extendida (lo que llamamos cuarta), sobre lo largo y ancho del maso; lo largo tiene 2cuartas y lo ancho 1 cuarta. Ya no tengo que llevar nada de material a la tienda, sino números y con gran facilidad hago el encargo.

Es decir, los números no solo sirven para contar y representar los conjuntos; sirven también para medir, es decir para representar longitudes, áreas, volúmenes, etc.

¿Y qué es medir longitudes? Es comparar esas longitudes con otra que se toma como unidad, se obtiene así **números** que nos dicen las veces que esas longitudes contienen a la **longitud unidad**. Gracias a las **medidas** podemos comparar fácilmente las longitudes de las líneas férreas, las carreteras, etc.



UNIDADES MÉTRICAS DECIMALES (M.K.S.)

La unidad básica de longitud es el **metro (m)**, la de superficie es el **metro cuadrado (m²)** y la del volumen es el **metro cúbico (m³)**. Estas equivalencias las resumimos en las siguientes tablas:

1	UNIDAD	SIMBOLO	VALOR EN (m)
MULTIPLOS	Miriámetro	Mm	10000 = 10 ⁴
	Kilómetro	Km	1000 = 10 ³
	Hectómetro	Hm	100 = 10 ²
	Decámetro	Dm	10 = 10 ¹
UNIDAD BÁSICA	(METRO)	m	1=10 ⁰
SUBMULTIPLOS	Decímetro	dm	0,1= 10 ⁻¹
	Centímetro	cm	0,01= 10 ⁻²
	Milímetro	mm	0.001 = 10 ⁻³
	Micra	<i>u</i>	0,0001= 10 ⁻⁴
	Milimicra	<i>mu</i>	0,00001= 10 ⁻⁵
	ångstrom	<i>A⁰</i>	0,000001 = 10 ⁻⁶

2	UNIDAD	SIMBOLO	VALOR EN (m ²)
MULTIPLOS	Miriámetro cuadrado	Mm ²	100000000 = 10 ⁸
	Kilómetro cuadrado	Km ²	1000000 = 10 ⁶
	Hectómetro cuadrado	Hm ²	10000 = 10 ⁴
	Decámetro cuadrado	Dm ²	100 = 10 ²
UNIDAD BÁSICA	(METRO CUADRADO)	m ²	1=10 ⁰

SUB- MULTIPLoS	Decímetro cuadrado Centímetro cuadrado Milímetro cuadrado	dm² cm² mm²	0,01 = 10⁻² 0,0001 = 10⁻⁴ 0.000001 = 10⁻⁶
---------------------------	--	---	---

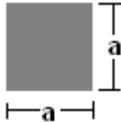
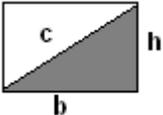
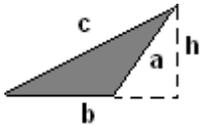
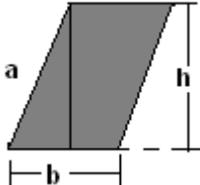
3	UNIDAD	SIMBOLO	VALOR EN (m ³)
MULTIPLoS	Miriámetro cúbico Kilómetro cúbico Hectómetro cúbico Decámetro cúbico	Mm³ Km³ Hm³ Dm³	1000000000000 = 10¹² 1000000000 = 10⁹ 1000000 = 10⁶ 1000 = 10³
UNIDAD BÁSICA	(METRO CÚBICO)	m ³	1=10 ⁰
SUB- MULTIPLoS	Decímetro cúbico Centímetro cúbico Milímetro cúbico	dm³ m³ mm³	0,001 = 10⁻³ 0,000001 = 10⁻⁶ 0.000000001 = 10⁻⁹

RESUMEN DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS



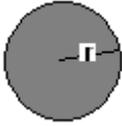
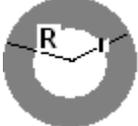
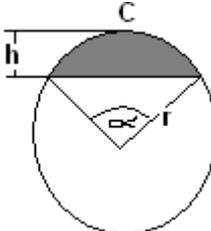
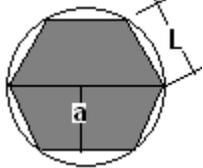
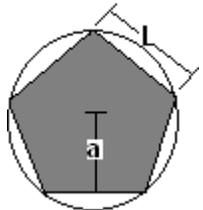
La superficie o área, es la extensión de una figura en dos dimensiones:
"largo y ancho"

El volumen, es la extensión de un cuerpo en tres dimensiones:
"Alto, ancho y largo"

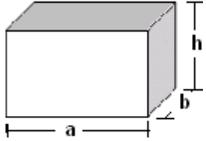
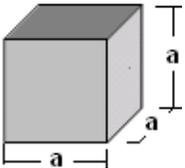
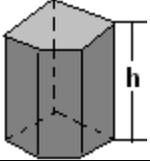
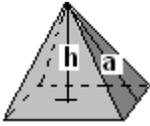
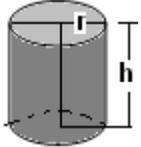
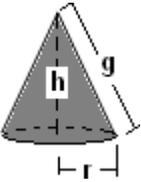
NOMBRE	FIGURA	ELEMENTOS	PERÍMETRO	ÁREA
CUADRADO		a = lado	$P = 4a$	$A = a^2$
RECTANGULO		b = base r = radio	$P = 2(a+b)$	$A = b \cdot h$
TRIÁNGULO RECTÁNGULO		b = base h = altura c = lado mayor (hipotenusa)	$P = b+c+h$	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
TRIÁNGULO		a, b, c = lados h = altura	$P = a+ b+c$	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
PARALELOGRAMO		a = lado b = base h = altura	$P = 2(a+b)$	$A = b \cdot h$

Para medir el área o el volumen, se utilizan las fórmulas correspondientes



NOMBRE	FIGURA	ELEMENTOS	PERÍMETRO	ÁREA
CÍRCULO		r = radio	$P = \pi D$ $P = 2\pi r$	$A = \pi \cdot r^2$
CORONA CÍRCULAR		R = radio mayor r = radio menor	$P \text{ total} = \pi(d + D)$	$A = \pi(R^2 - r^2)$
SEGMENTO CÍRCULAR		C = cuerda r = radio h = altura α = ángulo en grados	$P = 0.01745r \cdot \alpha + C$	$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360} - \frac{C(r - h)}{2}$
SECTOR CÍRCULAR		L = longitud del arco α = ángulo en grados r = radio	$L = 0.01745 \cdot r \cdot n$ $P = L + 2r$	$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360}$
PENTÁGONO REGULAR		a = apotema L = lado	$P = 5L$	$A = \frac{p \cdot a}{2}$ Fórmula válida para un eneágono regular ("n" lados)
HEXÁGONO REGULAR		a = apotema L = lado a es perpendicular desde el centro a cualquier lado	$P = 5L$	$A = \frac{p \cdot a}{2}$

RESUMEN DE ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS:

NOMBRE	FIGURA	ELEMENTOS	ÁREA	VOLUMEN
ORTOEDRO (PARALELEPIPEDO)		a = largo b = ancho h = altura	$S_l = 2h(a + b)$ $S_t = S_l + 2ab$	$V = a \cdot b \cdot h$
HEXAEDRO (CUBO)		A = lado	$S_l = 4a^2$ $S_t = 6a^2$	$V = a^3$
PRISMA RECTO		Pb = perímetro(base) h = altura Sb = Área base	$S_l = P_b h$ $S_t = S_l + 2S_b$	$V = S_b \cdot h$
PIRÁMIDE REGULAR		Pb = perímetro(base) a = apotema h = altura Sb = Área base	$S_l = \frac{1}{2} P \cdot a$ $S_t = S_l + S_b$	$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$
CILINDRO		h = altura r = radio	$S_l = 2\pi \cdot r \cdot h$ $S_t = 2\pi \cdot r(h + r)$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
CONO		h = altura r = radio de la base g = generatriz	$S_l = \pi \cdot r \cdot g$ $S_t = \pi \cdot r(g + r)$	$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$
ESFERA		r = radio de la esfera	$S = 4\pi \cdot r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

REGIONES SOMBREADAS

Son regiones poligonales geométricas que están sombreadas o achuradas.

AREA DE UNA REGIÓN SOMBREADA

Es calcular el valor de la porción sombreada su valor está dada en unidades cuadradas.

PERIMETRO DE UNA REGIÓN SOMBREADA

Es calcular la suma de los lados de la figura sombreada.

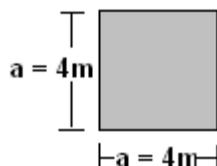
RECOMENDACIONES:

- a) Para el cálculo de áreas de regiones sombreadas es indispensable dominar las formulas.
- b) Para el cálculo de perímetros de regiones sombradas no emplear formulas de áreas, ir calculando todo en función de lados y longitud de la circunferencia.
- c) El cálculo de áreas de una parte sombreada será igual al área total menos la parte no sombreada.
- d) Se trasladan regiones sombreadas con la finalidad de formar figuras conocidas, donde sea más fácil calcular su área.

Ejemplo:

1.- Calcular el área del cuadrado cuyo lado "a" se indica:

a): $a = 4 \text{ m}$



El área será:

$$A = a \cdot a = a^2$$

$$A = (4\text{m})^2$$

$$A = 16 \text{ m}^2$$

b): $a = 17 \text{ cm}$

c): $a = 100 \text{ cm}$

2.- Calcular el área del rectángulo cuya base “**b**” y altura “**h**” se indica:

a): $b = 37 \text{ m}$

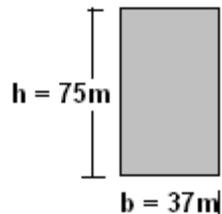
$h = 75 \text{ m}$

El área será:

$$A = b \cdot h$$

$$A = 37\text{m} \cdot 75\text{m}$$

$$A = 2775 \text{ m}^2$$



b): $b = 45 \text{ m}$

$h = 20 \text{ m}$

c): $b = 30 \text{ m}$

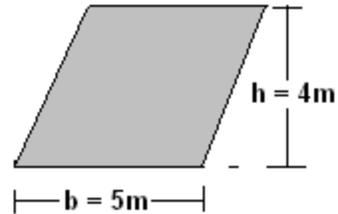
$h = 120 \text{ m}$

3.- Calcular el área del paralelogramo cuya base “b” y altura “h” se indica:

a): $b = 5 \text{ m}$
 $h = 4 \text{ m}$

El área será:

$$A = b \cdot h$$
$$A = 5\text{m} \cdot 4\text{m}$$
$$A = 20 \text{ m}^2$$



b): $b = 17 \text{ m}$
 $h = 35 \text{ m}$

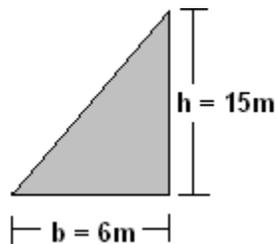
c): $b = 3 \text{ m}$
 $h = 9 \text{ m}$

4.- Calcular el área del triángulo cuya base “b” y altura “h” se indica:

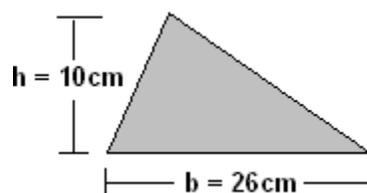
a): $b = 6 \text{ m}$
 $h = 15 \text{ m}$

El área será:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$
$$A = \frac{6\text{m} \times 15\text{m}}{2}$$
$$A = 45\text{m}^2$$



b): $b = 26 \text{ m}$
 $h = 10 \text{ m}$



c): $b = 13 \text{ m}$
 $h = 5.5 \text{ m}$

5.- Calcular el área del Círculo cuyo radio o diámetro se indica:

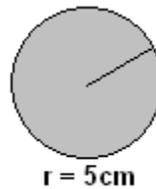
a): $r = 5 \text{ cm}$

El área en función a la radio será:

$$A = \pi \times r^2$$

$$A = 3.1416 \times (5\text{m})^2$$

$$A = 78.54\text{m}^2$$

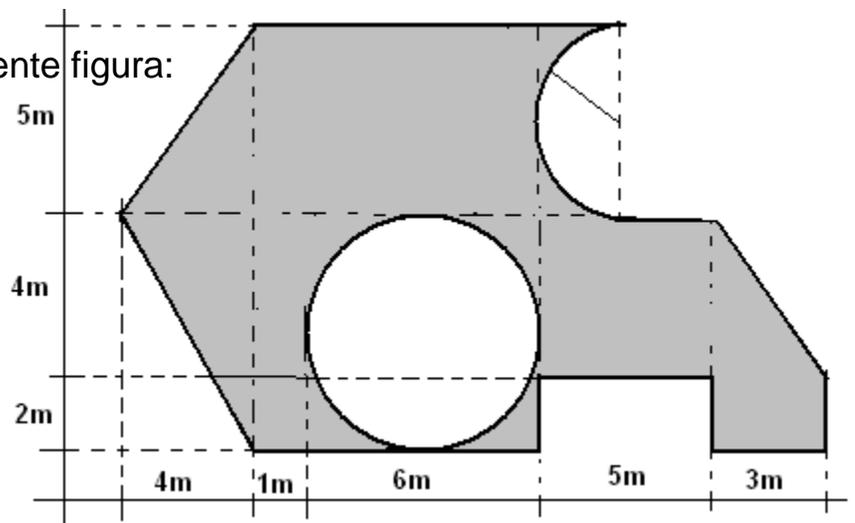


b): $r = 23 \text{ m}$

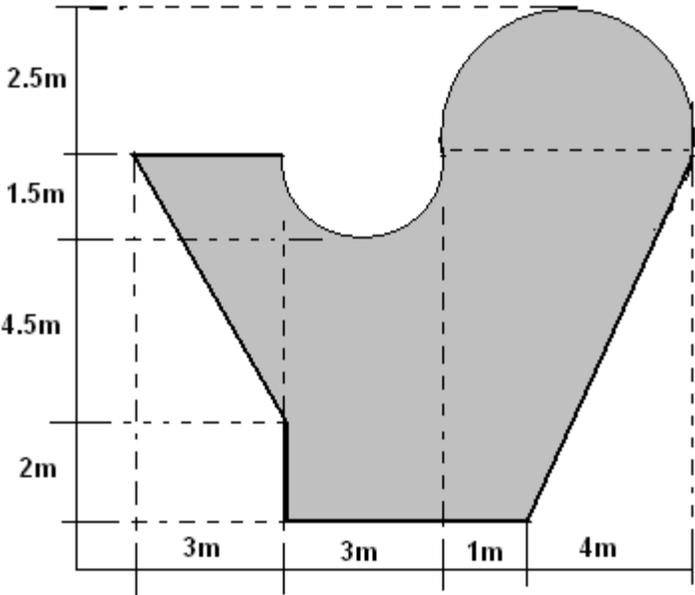
c): $D = 160 \text{ Km}$

6.- Calcular el área de la siguiente figura:

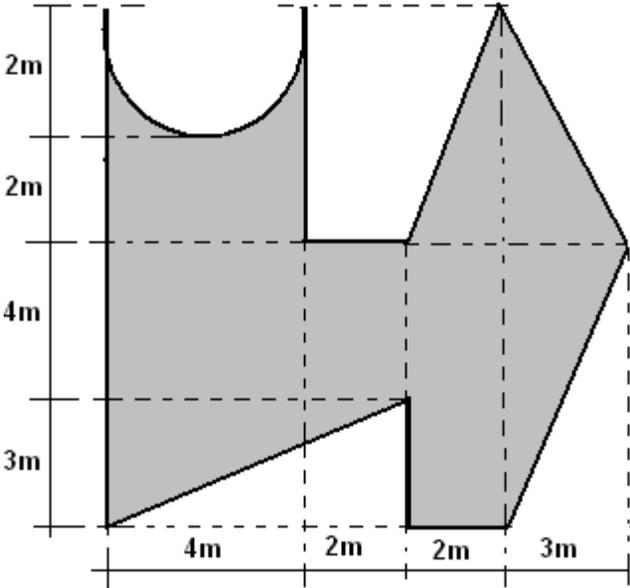
a):



b):



c):



ÁREAS Y VOLUMENES

Es la parte de la geometría, que estudia las relaciones y propiedades de las figuras tridimensionales:

ACTIVIDADES

1.- ¿Cuántos m^3 de aire hay en un curso de 7m de largo por 5m de ancho y 3m de altura?

2.- Un tanque de agua tiene forma prismática de 2m de largo, 1.5m de ancho y 1.5m de altura. ¿Qué cantidad de agua puede almacenar el tanque?

3.- Una cúpula semiesférica tiene un radio de 7m ¿Cuál es el volumen de la cúpula?

4.- Calcular la superficie total de la tierra y su volumen, considerando que es esférica y tiene un radio de $r = 6378\text{km}$.

5.- Se desea construir una pared de 7m de largo por 3m de alto y 18cm de espesor. ¿Cuántos ladrillos de $24 \times 12 \times 18\text{cm}$ se necesitan para construir la pared?

6.- ¿Cuántos litros de aceite caben en una lata de forma cilíndrica de 40cm de altura y 20cm de radio?

7.- Un pirámide de base cuadrada tiene 210m de lado y 160m de altura. ¿Cuál es el volumen de la pirámide?

CONVERSIÓN DE UNIDADES:

Como ocurría con otras magnitudes, para comparar medidas de superficie u operar con ellas debemos tener todas las medidas **expresadas en la misma unidad**. Con frecuencia debemos pues transformar unas unidades en otras, como podrás advertir en estos ejemplos:

Ejemplo-1:

Uno de los jardines de una institución mide 15600 dm^2 ¿Cuántos Decámetros cuadrados (Dm^2) son?

- Buscó las equivalencias:

$$\begin{aligned} 1\text{dm}^2 &= 0.01\text{m}^2 \\ 1\text{Dm}^2 &= 100 \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$A = 15600 \text{ dm}^2$$



$$15600\text{dm}^2 = 15600\text{dm}^2 \cdot \frac{0.01\text{m}^2}{1\text{dm}^2} \cdot \frac{\text{Dm}^2}{100\text{m}^2} = \frac{15600 \cdot 0.01\text{Dm}^2}{100}$$

$$15600\text{dm}^2 = 1.56\text{Dm}^2$$

Ejemplo-2:

El facilitador de Matemática le pide a Ana que exprese en metros cuadrados 0.8Hm^2 que miden las instalaciones de la Institución:

- Buscó las equivalencias:

$$1\text{Hm}^2 = 10000 \text{m}^2$$



$$0.8\text{Hm}^2 = 0.8\text{Hm}^2 \cdot \frac{10000\text{m}^2}{1\text{Hm}^2} = \frac{0.8 \cdot 10000\text{m}^2}{1}$$

$$0.8\text{Hm}^2 = 8000\text{m}^2$$

ACTIVIDADES

A): Completa los siguientes cuadros:

Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm
	1					
		2				
					157.2	
0.03						

Km ²	Hm ²	Dm ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
	2					
				10 ²		
5.2						
		3*10 ⁻²				

Km ³	Hm ³	Dm ³	m ³	dm ³	cm ³	mm ³
3*10 ⁻⁹						
			10 ⁻¹			
					2*10 ⁵	
						3,6*10 ⁷

B): Halla el resultado de cada ejercicio siguiente, expresando el resultado final en la unidad pedida:

1): 3500cm +2Hm +37000 (en metros)

2): 0.0045Km² +1.6Hm²-1600m² (en metros cuadrados)

3): 0.000018m³ + 7*10⁻¹² Km³ - 3*10⁻¹⁰ Hm³ (en milímetros cúbicos)

C): completa las casillas en blanco:

➤ **Un ortoedro (paralelepípedo)**

largo	ancho	alto	Área lateral (m²)	Área total (m²)	Volumen (m³)
22cm	20cm	21cm			
18m	16m	6m			
8000mm	0.06Hm	40dm			

➤ **Un exaedro (cubo)**

Arista	Área lateral (m²)	Área total (m²)	Volumen (m³)
			
7cm			
		96m ²	
3,5cm			

UNIDAD II

TRIGONOMETRIA

INDICADOR

Interpreta y aplica de forma práctica las funciones y leyes trigonométricas

TRIGONOMETRÍA

¿Qué entiendes por trigonometría?

.....
.....
.....

¿Qué triángulos conoces y que diferencias existe entre ellas?

.....
.....
.....

¿Relaciona los triángulos con los objetos de tu entorno?

.....
.....
.....

INTRODUCCION

El origen de la palabra trigonometría proviene del griego. Es la composición de las palabras griegas trigonon: triángulo y metron: medida; trigonometría: medida de los triángulos.

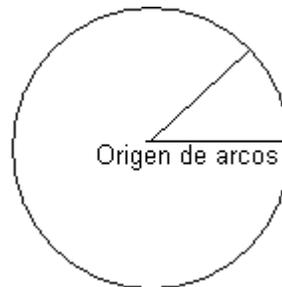
Originalmente, la trigonometría es la ciencia cuyo objeto es la resolución numérica (algebraica) de los triángulos. Los seis elementos principales en todo triángulo son sus tres lados y sus tres ángulos. Cuando se conocen tres de estos elementos, con tal que al menos uno de ellos sea un lado, la trigonometría enseña a solucionar el triángulo, esto es, a encontrar los otros tres elementos. En este estado de la trigonometría se definen las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc.), de un ángulo agudo en un

triángulo rectángulo, como las razones entre dos de los lados del triángulo; el dominio de definición de estas funciones es el conjunto de los valores que puede tomar el ángulo $[0, 180]$.

Sin embargo, el estudio de la trigonometría no limita sus aplicaciones a los triángulos: geometría, navegación, agrimensura, astronomía; sino también, para el tratamiento matemático en el estudio del movimiento ondulatorio, las vibraciones, el sonido, la corriente alterna, termodinámica, investigación atómica, etc. Para lograr esto, se debe ampliar el concepto de función trigonométrica a una función de una variable real, en vez de limitarse a una función de ángulos.

CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

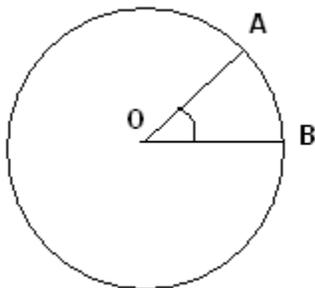
Es un círculo en el cual se ha fijado un origen de arcos. Dicho origen de arcos es el lado derecho del diámetro horizontal.



El radio del círculo trigonométrico, generalmente, es igual a uno.

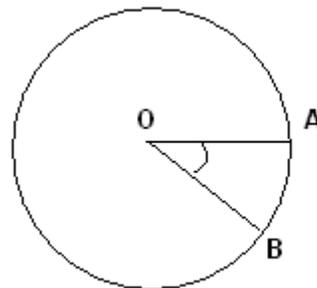
En el círculo trigonométrico, los ángulos tienen signo positivo cuando se marcan, desde el origen, en sentido contrario de las agujas del reloj; y tienen signo negativo si se marcan, desde el origen, en sentido de las agujas del reloj.

Ángulo positivo



AOB es positivo

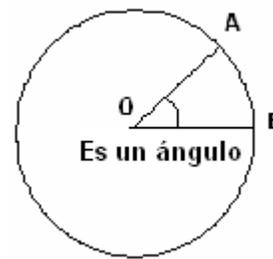
Ángulo negativo



AOB es negativo

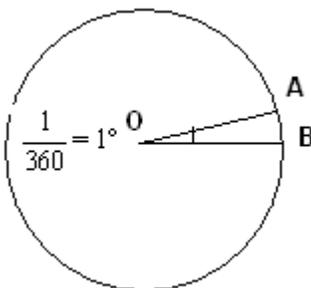
SISTEMAS DE MEDIDA DE ÁNGULOS

Los sistemas de medida de ángulos más importantes son el sexagesimal, centesimal es un ángulo y radial. Estos sistemas están en relación a las partes de una circunferencia.



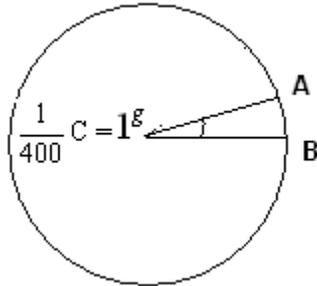
SISTEMA SEXAGESIMAL

La unidad de medida es la 360ava parte de la circunferencia, donde cada una de estas partes es **grado sexagesimal** (1°), cada grado es dividido en 60 minutos o partes (') y cada minuto es dividido en 60 segundos o partes (").



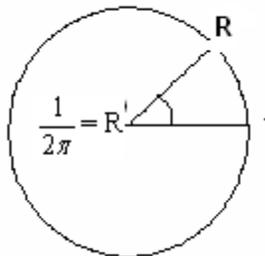
SISTEMA CENTESIMAL

La unidad de medida es la 400 ava parte de la circunferencia, donde cada **grado centesimal** (1), cada grado está dividido en 100 minutos o partes () y cada minuto en 100 segundos o partes ().



SISTEMA RADIAL

La unidad de medida es un ángulo que comprende un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia y se llama **radián**. El perímetro de la circunferencia es $2\pi r$, donde r es el radio y $\pi = 3,1416$.



Ejemplos:

- 1) Una vuelta completa de la circunferencia tiene..... grados sexagesimales.
- 2) Una vuelta completa de la circunferencia tiene..... grados centesimales.
- 3) Una vuelta completa de la circunferencia tiene..... radianes.
- 4) Media vuelta completa de la circunferencia tiene..... grados sexagesimales.

5) Media vuelta completa de la circunferencia tiene..... grados centesimales.

6) Media vuelta completa de la circunferencia tiene..... radianes.

NOTACIÓN

Un ángulo puede ser anotado por:

Una letra griega $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$

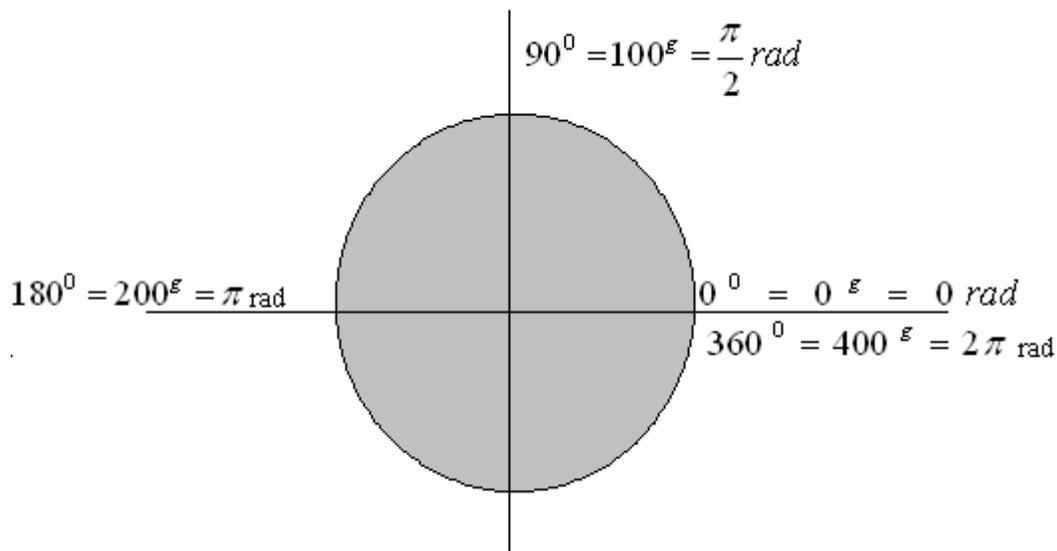
Un punto A ó A ó A

Tres puntos ABC ó ABC

Números 1, 2, 3, ...

CONVERSIÓN DE UN SISTEMA A OTRO:

Observe todos los sistemas en una sola circunferencia:



Si a un ángulo cualquiera le llamamos **S** en el sistema sexagesimal, **C** en el sistema centesimal y **R** en el sistema radial, tendremos que:

Ejemplos:

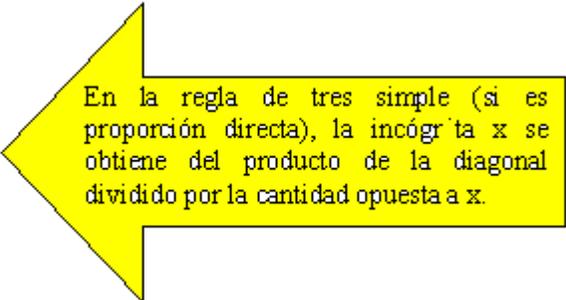
1) Transformar 3 radianes a grados sexagesimales.

De $\frac{S}{180^0} = \frac{C}{200^g} = \frac{R}{\pi}$ extraemos $\frac{S}{180^0} = \frac{R}{\pi} \cdot (180)$

$$\frac{S \cdot 180}{180^0} = \frac{R \cdot 180}{\pi}$$

$$S = \frac{R \cdot 180}{\pi} \Rightarrow S = \frac{3 \cdot 180}{3,1416}$$

$$S = 171^0 53' 12,9''$$



En la regla de tres simple (si es proporción directa), la incógnita x se obtiene del producto de la diagonal dividido por la cantidad opuesta a x .

Solución.

O bien, si:

$$\begin{array}{l} 180^0 \text{ ————— } \pi \text{ rad} \\ x^0 \text{ ————— } 3 \text{ rad} \end{array}$$

$$x = \frac{3 \text{ rad} \times 180^0}{\pi \text{ rad}}$$

$$x = 171^0 53' 12,9''$$

2) Transformar 310° a radianes.

Solución.

$$\begin{array}{r} 360^\circ \text{-----} \quad 2\pi rad \\ 310^\circ \text{-----} \quad x \text{ rad} \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{310^\circ \cdot 2\pi rad}{360^\circ}$$

$x = 5.4105 \text{ rad}$

3) Transformar $2,5 \text{ rad}$ a grados centesimales.

$$\begin{array}{r} 200^\circ \text{-----} \quad \pi rad \\ x^\circ \text{-----} \quad 2,5 rad \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{200^\circ \cdot 2,5 rad}{\pi rad}$$

$$x = 159.1549^\circ$$

ACTIVIDADES

HACIENDO SE APRENDE

1. Completa con **V**, si es verdadero y con **F**, si es falso en la línea punteada:

a) Un grado sexagesimal es la 360 ava parte de la circunferencia

b) Los ángulos son positivos si se miden en el sentido contrario de las agujas del reloj

c) El origen de arcos se encuentra en el lado derecho del diámetro horizontal.....

2. Construir con el transportador los siguientes ángulos:

a) 15°

b) 35°

c) 75°

d) 135°

e) 245°

3. Transformar al sistema centesimal los siguientes ángulos:

a) 7°

b) 18°

c) 87°

d) $54^\circ 23'$

e) 546°

4. Transformar al sistema sexagesimal los siguientes ángulos:

a) $\frac{1}{4} \pi rad$

b) $1,7 \pi rad$

c) $12 \pi rad$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

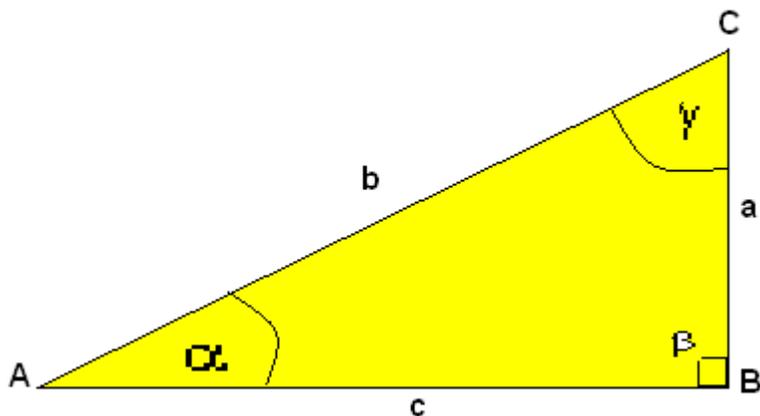
INTRODUCCIÓN

El nombre de trigonometría, en esencia significa “medir triángulos”, por lo tanto el objetivo de la trigonometría es la resolución numérica de los triángulos; siendo necesarios conocer nuevas operaciones u operadores propios de la trigonometría, y estos operadores se aplican sobre los elementos de un triángulo rectángulo.

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Es el triángulo más importante, porque tiene elementos muy notables, entre ellos: un ángulo recto, y una relación entre los lados establecida por el “Teorema de Pitágoras”; donde sus elementos se denominan:

Sea el triángulo rectángulo ABC.



Los lados: “a”, “c” se denominan Catetos.

“b” se denomina Hipotenusa.

Los ángulos: β es recto, es decir mide 90° .

α y γ , son ángulos agudos, complementarios.

Donde: $\alpha + \gamma = 90^\circ$, son ángulos complementarios.

RAZÓN

Es la relación o comparación de una cantidad con respecto a otra de la misma especie, expresado como cociente indicado.

Ejemplo:

$$\frac{3}{5} \rightarrow \text{Razón o cociente indicado} \qquad 3,6 \rightarrow \text{División resuelta}$$

RAZÓN TRIGONOMÉTRICA

Es la relación o comparación de las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo, estas pueden ser:

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a}{c}, \quad \frac{b}{c}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{c}{b}$$

Una razón trigonométrica queda definida cuando se refiere respecto de un ángulo agudo del triángulo rectángulo, sea α el ángulo de referencia:

$$\begin{array}{l} \frac{a}{b} \quad \text{ó} \quad \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \\ \frac{c}{b} \quad \text{ó} \quad \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \\ \frac{a}{c} \quad \text{ó} \quad \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \end{array}$$

Denominando;

Razones trigonométricas directas:

Seno del ángulo “ α ”, a la razón del cateto opuesto y la hipotenusa

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{b}$$

Coseno del ángulo “ α ”, a la razón del cateto adyacente y la hipotenusa

$$\text{cos } \alpha = \frac{c}{b}$$

Tangente del ángulo “ α ”, a la razón del cateto opuesto y el cateto adyacente

$$\text{tan } \alpha = \frac{a}{c}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS:

Cosecante del ángulo “ α ”, a la razón de la hipotenusa y el cateto opuesto

$$\text{csc } \alpha = \frac{b}{a}$$

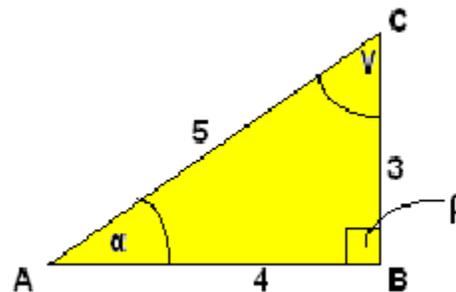
Secante del ángulo “ α ”, a la razón de la hipotenusa y el cateto adyacente

$$\text{sec } \alpha = \frac{b}{c}$$

Cotangente del ángulo “ α ”, a la razón del cateto adyacente y el cateto

opuesto $\cot \alpha = \frac{c}{a}$

Ejemplo; Dado el triángulo:



$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} \quad ; \quad \text{cos } \alpha = \frac{4}{5} \quad ; \quad \text{tan } \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\csc \alpha = \frac{5}{3} \quad ; \quad \sec \alpha = \frac{5}{4} \quad ; \quad \cot \alpha = \frac{4}{3}$$

Ejemplo; Del triángulo anterior, hallar:

$$\text{sen } \gamma = \text{---} \quad ; \quad \text{cos } \gamma = \text{---} \quad ;$$

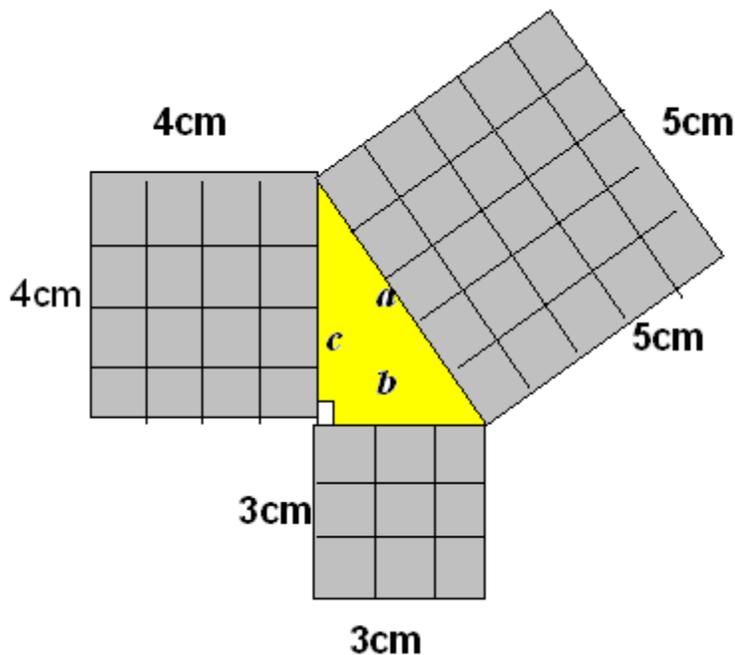
$$\text{tan } \gamma = \text{---}$$

$$\csc \gamma = \text{---} \quad ; \quad \sec \gamma = \text{---} \quad ;$$

$$\cot \gamma = \text{---}$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras no es nada más que la relación de áreas de cuadrados a partir de los lados de un triángulo rectángulo.

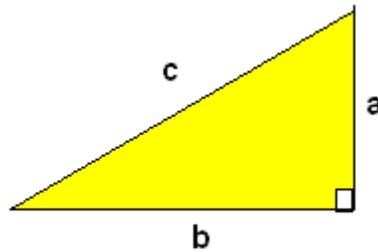


TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$\begin{array}{ccc}
 a^2 = b^2 + c^2 & \text{ó} & 5^2 = 3^2 + 4^2 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \text{Cuadrado de} & & \text{Cuadrado de} & & \text{Cuadrado} & & \text{de los} \\
 \text{la hipotenusa.} & & \text{la hipotenusa.} & & \text{de los} & & \text{catetos.} \\
 \text{Cuadrado de los} & & & & & & \\
 \text{catetos.} & & & & & &
 \end{array}$$

Con dicha fórmula podemos hallar a, b ó c . Sólo tenemos que despejar:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

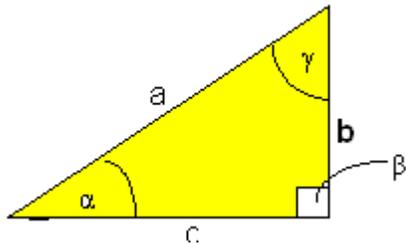
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

La resolución de triángulos rectángulos consiste en hallar los lados y ángulos de un triángulo a partir de otros lados y ángulos conocidos.

Para resolver un triángulo rectángulo utilizaremos las razones trigonométricas seno, coseno, tangente, el teorema de Pitágoras, ángulos complementarios, ángulos suplementarios; es decir:

Dado el siguiente triángulo rectángulo.



Razones trigonométricas

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{sen } \gamma = \frac{c}{a}$$

$$\text{cos } \gamma = \frac{b}{a}$$

$$\text{tan } \gamma = \frac{c}{a}$$

Ángulos suplementarios

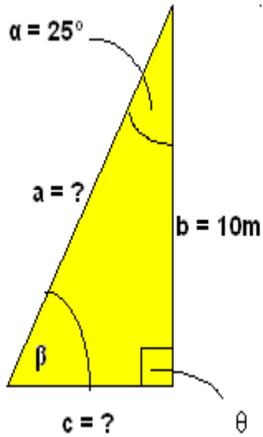
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ejemplo 1.

Resolver el triángulo rectángulo:



Datos:

Lados	Ángulos
a = ?	$\alpha = 25^\circ$
b = 10m	$\beta = ?$
c = ?	$\theta = 90^\circ$

Por ángulos complementarios:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Despejando β :

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

Reemplazando α :

$$\beta = 90^\circ - 25^\circ$$

$$\beta = 65^\circ$$

Por razones trigonométricas:

$$\cos \alpha = \frac{10}{a}$$

Despejando a:

$$a = \frac{10}{\cos \alpha}$$

Reemplazando α :

$$a = \frac{10}{\cos 25^\circ}$$

$$a = 11,0338m$$

Por Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Despejando c, y aplicando radicación ambos miembros:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

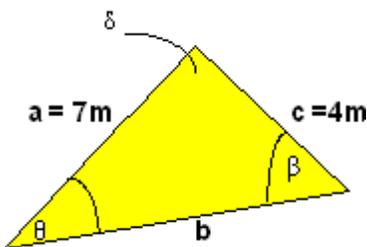
Reemplazando a, b:

$$c = \sqrt{11,0338^2 - 10^2}$$

$$c = 4,6631m$$

Ejemplo 2.

Resolver el triángulo rectángulo:



Datos:

Lados	Ángulos
a = ?	$\delta = 90^\circ$
b = 7m	$\beta = ?$
c = 4m	$\theta = ?$

Por el Teorema Pitágoras:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Aplicando radicación a ambos miembros:

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

Reemplazando a, c:

$$b = \sqrt{7^2 + 4^2}$$

$$b = 8,0622m$$

Por razones trigonométricas:

$$\tan \beta = \frac{a}{c}$$

Despejando el ángulo β :

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$$

Reemplazando a, c:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$\beta = 60^\circ 15' 18,43''$$

Por ángulos complementarios:

$$\beta + \theta = 90^\circ$$

Despejando el ángulo θ :

$$\theta = 90^\circ - \beta$$

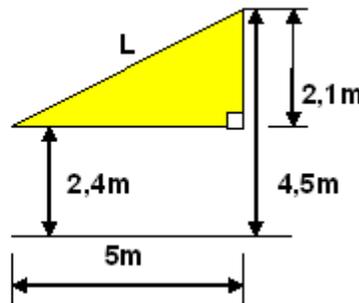
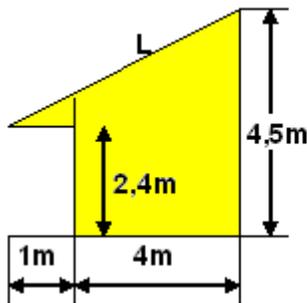
Reemplazando β :

$$\theta = 90^\circ - 60^\circ 15' 18,43''$$

$$\theta = 29^\circ 44' 41,57''$$

Ejemplo 3.

Un señor que construye una habitación (que tendrá 4m de largo, más 1m de alero, el alto de la pared delantera mide 2,4m y el alto de la pared trasera mide 4,5m) necesita saber la longitud L de las vigas de madera. ¿Efectúa el cálculo siguiente?



Por el Teorema Pitágoras:

$$L^2 = (2,1)^2 + 5^2$$

$$\sqrt{L^2} = \sqrt{(2,1)^2 + 5^2}$$

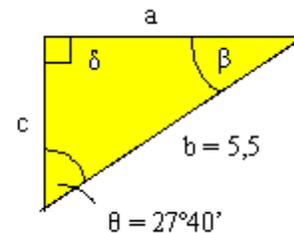
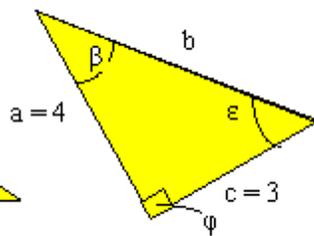
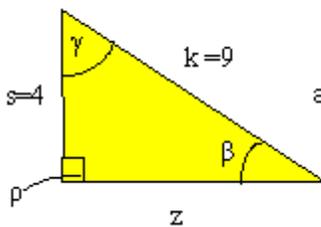
$$L = \sqrt{(2,1)^2 + 5^2}$$

$L = 5,4231m$

ACTIVIDADES

HACIENDO SE APRENDE

1. Resolver los siguientes triángulos rectángulos:



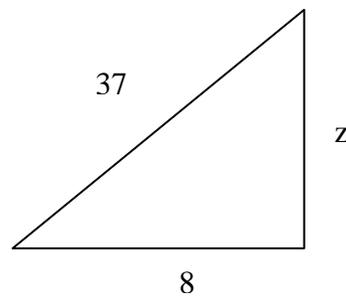
2. En una construcción se necesita poner una escalera de madera apoyada en el punto A y en el punto B. ¿Qué longitud mínima y que ángulo de inclinación debe tener si la altura es de 3m y la distancia horizontal del punto A a C es 2m?

3. Sabiendo que la sombra de un edificio mide 80 m cuando los rayos solares forman un ángulo de 30° con la horizontal, podemos calcular que el edificio tiene una altura $h = \underline{\hspace{2cm}}$

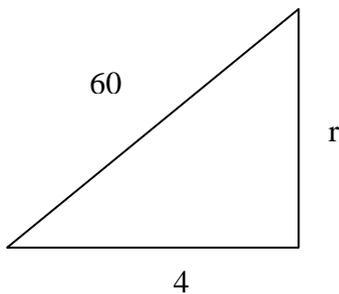
ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO

1. En el triángulo de la figura, el teorema de Pitágoras es

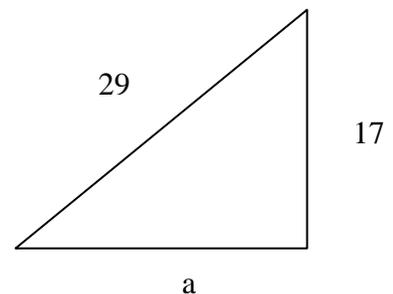
$13^2 = z^2 + 8^2$, y el cateto z es igual a $\underline{\hspace{2cm}}$



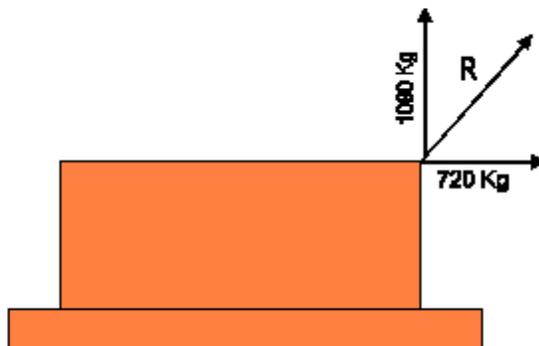
2. En el triángulo, $r = \underline{\hspace{2cm}}$



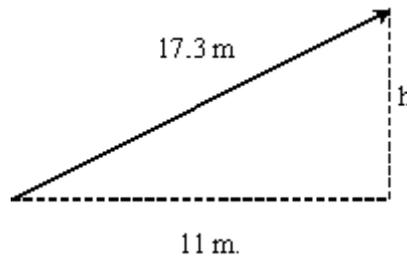
3. En el triángulo $a = \underline{\hspace{2cm}}$



3. Sobre el sólido se ejerce una fuerza Horizontal de 720 Kg. y una fuerza vertical de 1090 Kg. Calcular los resultados “R” de las 2 fuerzas



5. Maria está haciendo volar una cometa tal como muestra la figura. Calcular la altura desde el suelo hasta el cometa.



RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

En la resolución de triángulos oblicuángulos solo es necesario conocer la ley de senos, ley de cósenos y demás saber que los 3 ángulos interiores de un triángulo suman 180°

Ley de senos

“En todo triángulo, los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos”

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Ley de cósenos

“En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos por el coseno del ángulo comprendido.

Entonces se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Para otros lados:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Además: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

Ejemplo 1

Resolver el siguiente triángulo oblicuángulo.

Datos

	Cálculo de A <i>Aplicando la ley de coseno</i>	Cálculo de C <i>Aplicando la ley de coseno</i>
$a = 8$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$
$b = 10$	<i>Despejando Cos A</i>	<i>Despejando Cos C</i>
$c = 12$	$2bc \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - a^2$	$2ab \cos \hat{C} = a^2 + b^2 - c^2$
$\hat{A} = ?$	$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
$\hat{B} = ?$	$\cos \hat{A} = \frac{10^2 + 12^2 - 8^2}{2(10)(12)}$	$\cos \hat{C} = \frac{8^2 + 10^2 - 12^2}{2(8)(12)}$
$\hat{C} = ?$	$\cos \hat{A} = \frac{100 + 144 - 64}{240}$	$\cos \hat{C} = \frac{20}{160}$
	$\cos \hat{A} = \frac{180}{240} = 0,75$	$\cos \hat{C} = 0,125$
	$\hat{A} = \text{Arc Cos } 0,75$	$\hat{C} = \text{Arc Cos } 0,125$
	$\hat{A} = 41^\circ 24' 35''$	$\hat{C} = 82^\circ 49' 9''$

Cálculo de B
Aplicando la ley de coseno

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

Despejando Cos B

$$2ac \cos \hat{B} = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{8^2 + 12^2 - 10^2}{2(8)(12)}$$

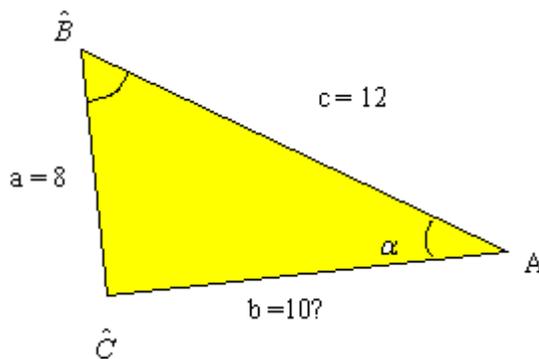
$$\cos \hat{B} = \frac{100 + 144 - 64}{240}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{64 + 144 - 100}{192}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{108}{192}$$

$$\hat{B} = \text{Arc Cos } 0,5625$$

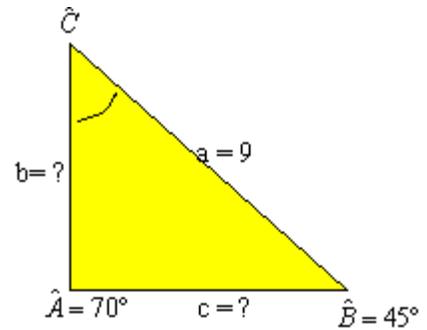
$$\hat{B} = 55^\circ 46' 16''$$



Ejemplo 2

Resolver el triángulo que tiene como datos:

Datos	Cálculo de \hat{C}	Cálculo de b
$a = 9$		
$b = ?$	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$	$\frac{a}{\text{Sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{Sen}\hat{B}}$
$c = ?$	$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B}$	Despejando b
$\hat{A} = 70$	$\hat{C} = 180^\circ - 70^\circ - 45^\circ$	$\text{Sen}\hat{A}.b = \text{Sen}\hat{B}.a$
$\hat{B} = 45^\circ$	$\hat{C} = 65^\circ$	$b = \frac{\text{sen}\hat{B}.a}{\text{sen}\hat{A}}$
$\hat{C} = ?$	Cálculo de c	$b = \frac{\text{sen}45^\circ.9}{\text{sen}70^\circ}$
	$\frac{a}{\text{Sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{Sen}\hat{C}}$	$b = 6,77$
	Despejando c	
	$\text{Sen}\hat{A}.C = \text{Sen}\hat{C}.a$	
	$c = \frac{\text{sen}\hat{C}.a}{\text{sen}\hat{A}}$	

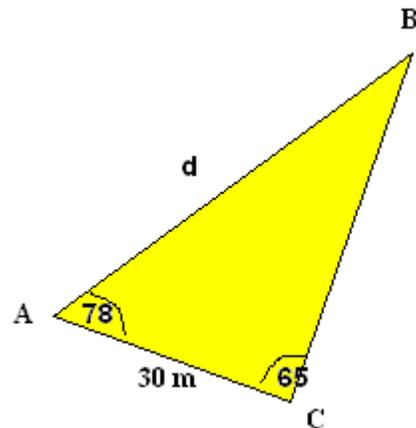


$$C = \frac{\text{Sen}65^\circ.9}{\text{sen}70^\circ} \Rightarrow c = 8,68$$

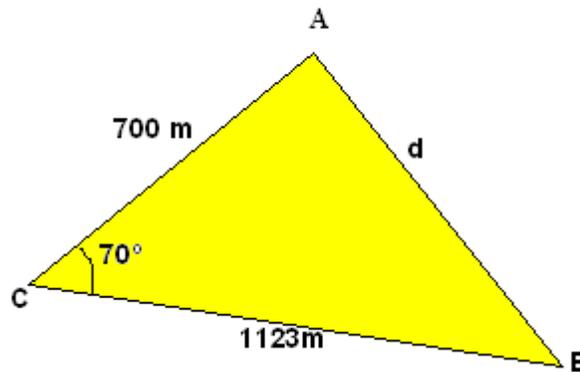
ACTIVIDADES

1. Se quiere calcular el ancho de un río para colocar un puente del punto A a B, pero es imposible llegar al punto B para medir.

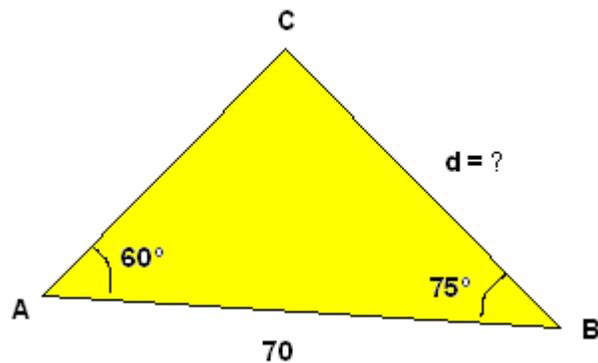
Entonces se ubica el punto C, se mide la distancia AC, de ángulos BAC y BCA, como se indica en la Figura



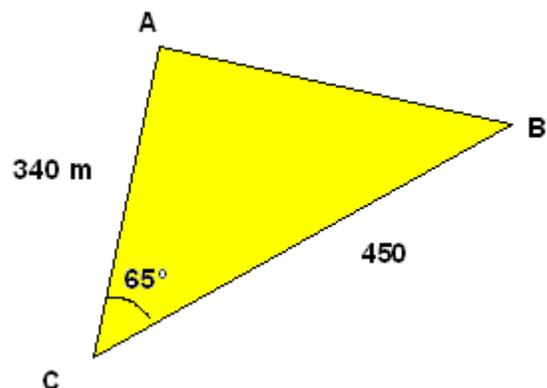
2. Si se trata de medir la distancia entre A y B. Siendo imposible medirla directamente, buscamos un punto C, se mide el ángulo ACB, y las distancias CA y CB según la figura,



3. Para calcular la distancia de en cuyo recorrido hay agua, se hicieron la mediciones (en terreno seco) indicadas en la figura hallara d



4. Para calcular la distancia L entre A y B no es posible hacerlo directamente por el cerro que separa A y B. Pero se considera e punto P y se hacen las mediciones de la figura. Calcular L



UNIDAD III

ESTÁTICA

INDICADOR

Analiza y resuelve problemas de estática utilizando teoremas y leyes trigonométricas vectoriales.

MAQUINAS SIMPLES

¿Qué entiendes por máquinas simples?

.....
.....
.....

¿Describe algunas de estas máquinas simples que conoces?

.....
.....
.....

¿Cómo lo utilizas en tu diario vivir?

.....
.....
.....

INTRODUCCIÓN

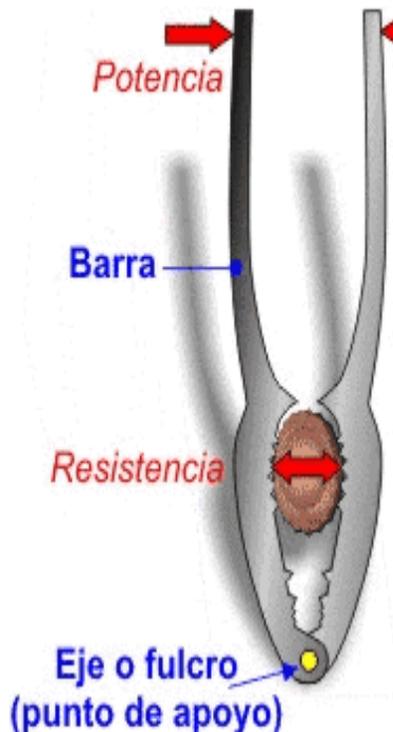
Cuando la máquina es *sencilla* y realiza su trabajo en *un solo paso* nos encontramos ante una **máquina simple**. Muchas de estas máquinas son conocidas desde la prehistoria o la antigüedad y han ido evolucionando incansablemente (en cuanto a forma y materiales) hasta nuestros días.

Algunas inventos que cumplen las condiciones anteriores son: cuchillo, pinzas, rampa, cuña, polea simple, rodillo, rueda, manivela, torno, hacha, pata de cabra, balancín, tijeras, alicates, llave fija...

Las máquinas simples se pueden clasificar en tres grandes grupos que se corresponden con el principal operador del que derivan: palanca, plano inclinado y rueda.

LA PALANCA

La palanca es un operador compuesto de una **barra** rígida que oscila sobre un **eje (fulcro)**. Según los puntos en los que se aplique la **potencia** (fuerza que provoca el movimiento) y las posiciones relativas de **eje** y **barra**, se pueden conseguir tres tipos diferentes de palancas a los que se denomina:



de primero, segundo y tercer género (o grado).

El esqueleto humano está formado por un conjunto de palancas cuyo **punto de apoyo (fulcro)** se encuentra en las articulaciones y la **potencia** en el punto de unión de los tendones con los huesos; es por tanto un operador presente en la naturaleza.

De este operador derivan multitud de máquinas muy empleadas por el ser humano: cascanueces, alicates, tijeras, pata de cabra, carretilla, remo, pinzas...

PLANO INCLINADO

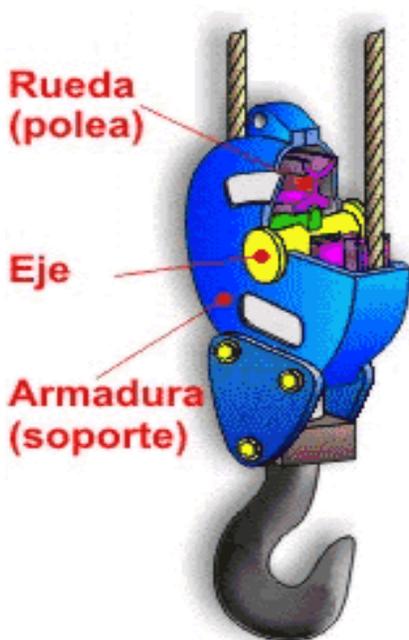
El plano inclinado es un operador formado por una superficie plana que forma un ángulo oblicuo con la horizontal.

Las rampas que forman montañas y colinas son *planos inclinados*, también pueden considerarse derivados de ellas los dientes y las rocas afiladas, por tanto este operador también se encuentra presente en la naturaleza.

De este operador derivan máquinas de gran utilidad práctica como: broca, cuña, hacha, sierra, cuchillo, rampa, escalera, tornillo-tuerca, tirafondos...

RUEDA

La rueda es un operador formado por un cuerpo redondo que gira respecto de un punto fijo denominado eje de giro.



Normalmente la *rueda* siempre tiene que ir acompañada de un *eje* cilíndrico (que guía su movimiento giratorio) y de un *soporte* (que mantiene al eje en su posición).

Aunque en la naturaleza también existen cuerpos redondeados (troncos de árbol, cantos rodados, huevos...), ninguno de ellos cumple la función de la rueda en las máquinas, por tanto se puede considerar que esta **es una máquina totalmente artificial**.

De la *rueda* se derivan multitud de máquinas de las que cabe destacar: polea simple, rodillo, tren de rodadura, noria, polea móvil, polipasto, rodamiento, engranajes, sistema correa-polea...

ACTIVIDADES

1. Menciona las características de estas maquinas simples.

.....

.....

.....

.....

2. Describe que máquinas simples utilizas en tu comunidad.

.....

.....

.....

.....

3. En la prehistoria los hombres primitivos que herramientas emplearon para la caza, pesca, para el traslado de piedra.

.....

.....

.....

.....

VECTORES EN EL PLANO

INTRODUCCIÓN

Uno de los elementos más usados de la física, en el desarrollo de sus leyes y conceptos fundamentales son los vectores, ellos nos permiten la comprensión de diversos fenómenos físicos y nos permiten desarrollarlos matemáticamente.

MAGNITUDES ESCALARES

Son aquellas magnitudes físicas que para estar bien definidas solo necesitan de un número y una unidad física. Por Ej.: masa, tiempo, densidad, trabajo, etc.

$$\frac{\text{VALOR} \quad - \quad \text{MODULO}}{7 \quad \text{Kg}}$$

NÚMERO ← → UNIDAD FÍSICA

Características de las magnitudes escalares:

- * Su valor no depende del sistema de referencia en el cual se ha medido.
- * Se pueden sumar o restar en forma aritmética. Por Ej.:

$$5 \text{ Kg} + 3 \text{ Kg} - 2 \text{ Kg} = 6 \text{ Kg}$$

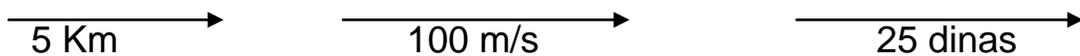
MAGNITUDES VECTORIALES:

Son aquellas magnitudes físicas que además de tener un valor y una unidad física, necesitan de una dirección y un sentido para quedar bien definidas. Por Ej.: La velocidad de un barco que navega 10 nudos hacia el norte, el desplazamiento de un automóvil que se dirige a 200 km hacia el oeste, la

fuerza que el viento ejerce sobre las alas de un avión en dirección sudeste, la aceleración, intensidad del campo eléctrico, etc.

Las magnitudes vectoriales se los representan por una flecha o saeta llamada vector, el mismo que se dibuja a una escala proporcional a la magnitud vectorial.

Así por ejemplo un vector de 5 cm puede representar: 5 Km ó 100m/s ó 25 dinas.



Los vectores se representan gráficamente con letras del alfabeto con una flecha encima: \vec{F} , \vec{B} , \vec{G} , \vec{M} , \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , etc.

Características de las magnitudes vectoriales:

- *Dependen del sistema de referencia respecto al cual se ha medido.
- *En general no se suman ni se restan aritméticamente. Por Ej.:

$6 \text{ m/s} + 2 \text{ m/s} + 3 \text{ m/s} \neq 11 \text{ m/s}$

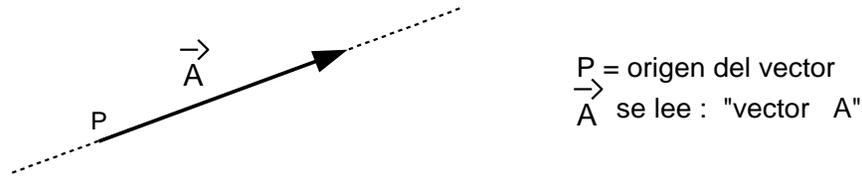
Diagram showing a train on a track moving to the right with a velocity of 6 m/s. The train is represented by a rectangle on two wheels, with an arrow above it pointing right and the label "6 m/s".

Estas magnitudes representadas por vectores se operan empleando métodos geométricos y trigonométricos.

VECTOR

Es aquel elemento matemático, representado por un segmento de recta orientado que permite representar gráficamente a una magnitud vectorial.

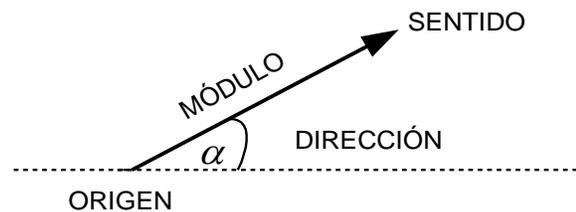
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN VECTOR.-



ELEMENTOS DE UN VECTOR

Se considera los siguientes elementos:

* **ORIGEN.-** Llamado también punto de aplicación, es el punto donde comienza el vector.



* **MÓDULO o INTENSIDAD.-** Representa el valor numérico de la cantidad vectorial y determina la longitud del vector con una escala apropiada.

* **DIRECCIÓN.-** Es la recta a lo largo de la cual se desplaza el vector. Prácticamente se define como el ángulo que hace dicho vector con uno o más rectas de referencia, según sea el caso, en el plano o en el espacio.

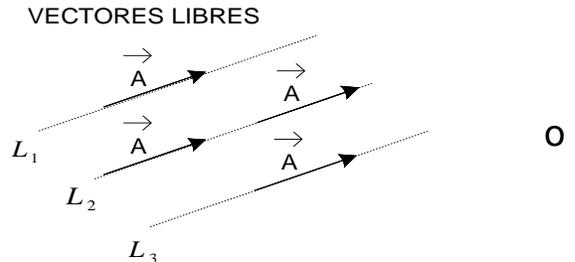
* **SENTIDO.-** Es la orientación que lleva el vector, se representa con una flecha o saeta que clasifica la dirección de un vector (+) o (-) con referencia a un eje de coordenadas respecto a los 4 puntos cardinales: N, S, E, O.

CLASES DE VECTORES

Existen diversas clases de vectores, entre ellos podemos indicar:

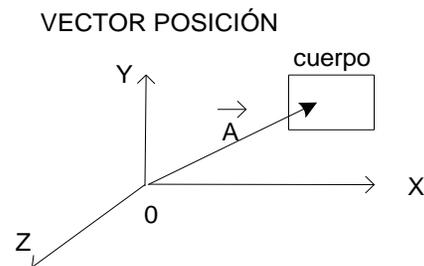
a) VECTORES LIBRES

Son aquellos que se desplazan libremente a lo largo de sus direcciones hacia rectas paralelas sin sufrir modificaciones.



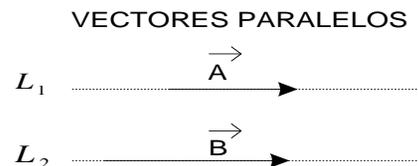
b) VECTORES POSICIÓN

Son vectores llamados fijos, tienen la dirección, el sentido y el punto de aplicación invariable e inamovible.



c) VECTORES PARALELOS

Dos o más vectores son paralelos si las rectas que los contienen son paralelas.

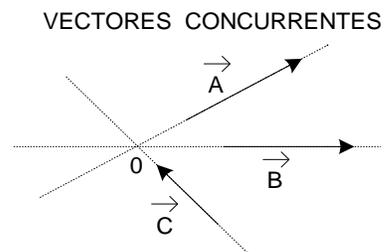


d) VECTORES COPLANARES

Dos o más vectores se dice que son coplanares cuando las rectas que las contienen están en un mismo plano.

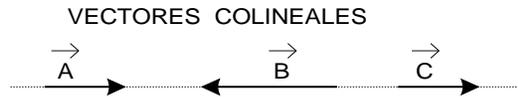
e) VECTORES CONCURRENTES

Dos o más vectores son concurrentes cuando sus líneas de acción (dirección) se cortan en un solo punto.



f) VECTORES COLINEALES

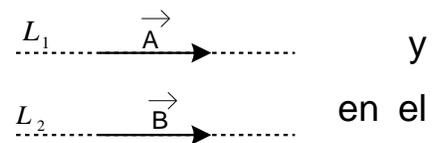
Dos o más vectores son colineales cuando sus líneas de acción se encuentran sobre una misma recta.



g) VECTORES IGUALES

Dos vectores son iguales si tienen igual magnitud dirección, es decir no necesariamente empiezan en el mismo punto.

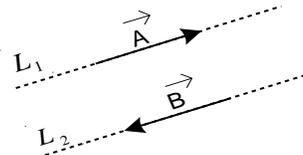
VECTORES IGUALES



h) VECTORES OPUESTOS

Se consideran opuestos si tienen igual magnitud, la misma dirección y sentido contrario u opuesto.

VECTORES OPUESTOS



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE VECTORES

Para representar gráficamente los vectores se toma una escala, es decir una equivalencia entre un valor y una unidad de longitud.

a) REPRESENTACIÓN POLAR

Es aquel vector representado por el módulo, y el ángulo que forma con una recta de referencia.

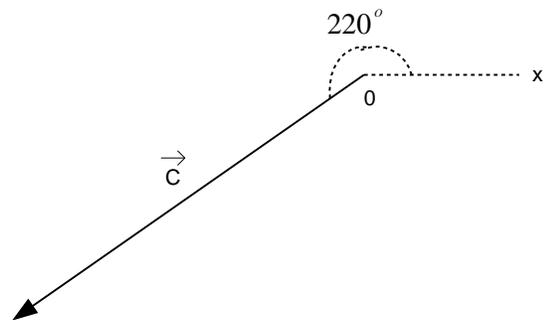
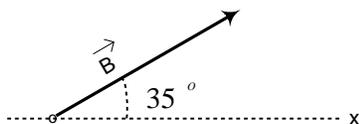
Ej. : Representar en forma polar los vectores : \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} si :

$$\vec{A} = 60 \text{ u}, 0^\circ$$

$$\vec{C} = 180 \text{ u}, 220^\circ$$



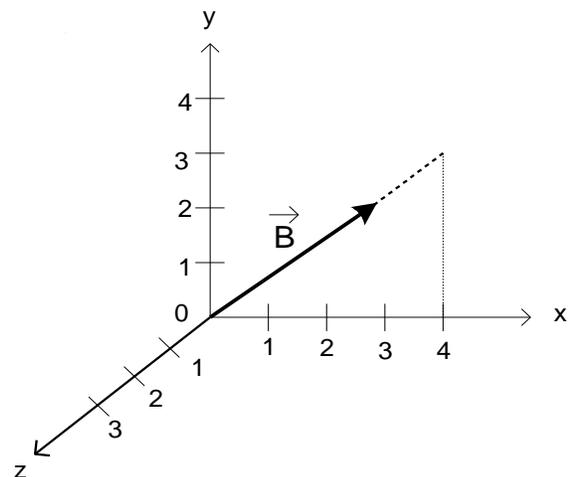
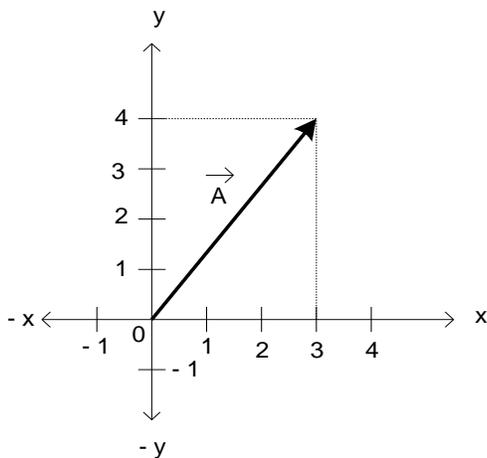
$$\vec{B} = 90 \text{ u}, 35^\circ$$



b) REPRESENTACIÓN RECTANGULAR

Un vector puede representarse en el plano o en el espacio considerando un sistema de ejes coordenados rectangulares.

Ejemplo.1: Representar gráficamente el vector $\vec{A} = (3, 4)$ en el plano y el vector $\vec{B} = (4, 3, 2)$ en el espacio.

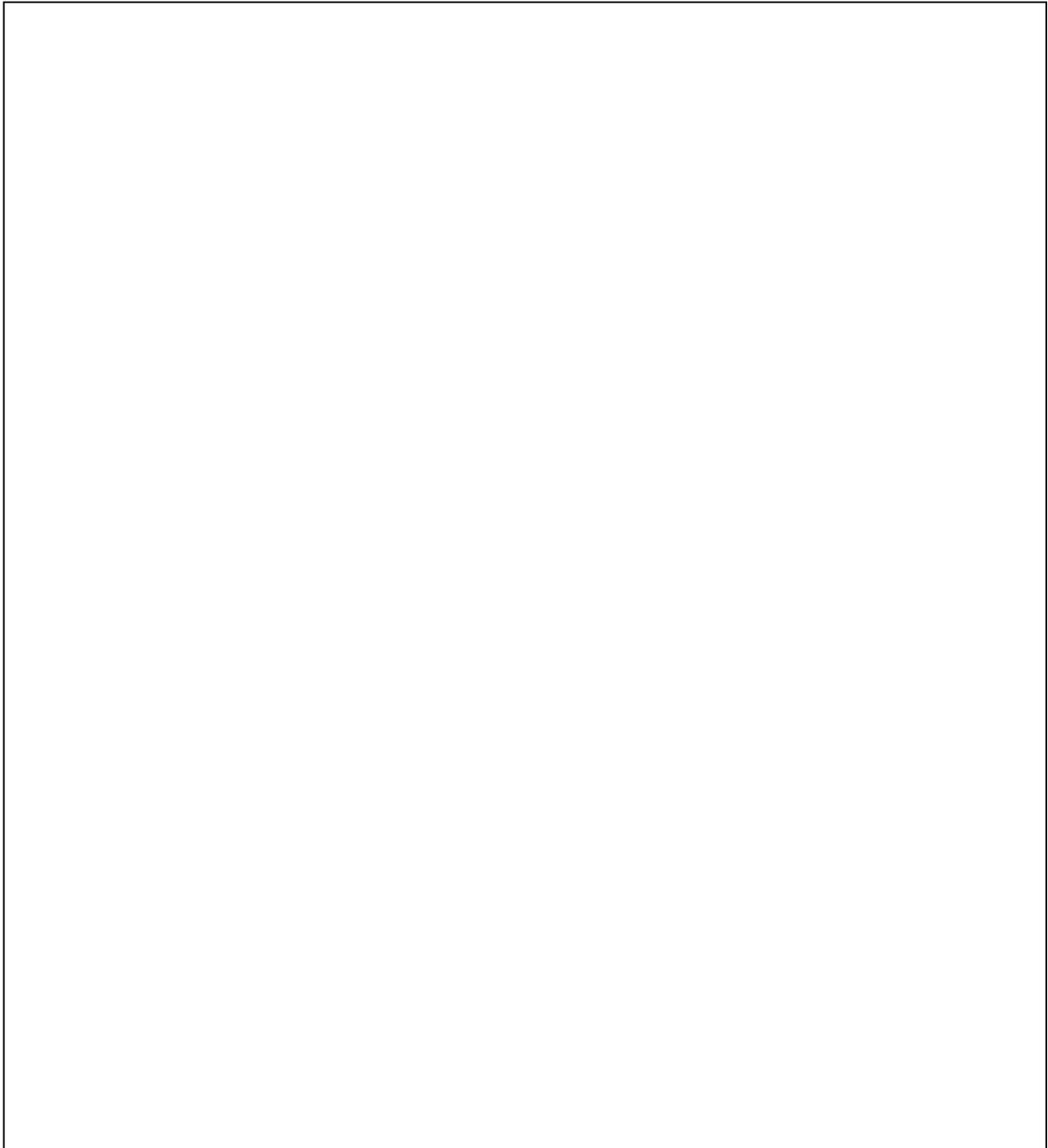


ACTIVIDADES

Representar los siguientes vectores:

a) $A = (4, 3)$; $B = (2, 5)$; $C = (3, 4)$; $D = (-5, -2)$; $E = (-3, 4)$

b) $M = (4, 3, 2)$; $N = (-3, 4, -2)$; $R = (-6, -3, -6)$; $S = (-4, 0, 2)$



OPERACIONES CON VECTORES

El cálculo vectorial es de mucha utilidad ya que permite escribir en forma sencilla las expresiones complicadas. Las operaciones que se pueden realizar son: suma, resta, multiplicación de un escalar por un vector, producto escalar, producto vectorial.

SUMA DE VECTORES

La suma de dos o más vectores es otro vector llamado **RESULTANTE**.

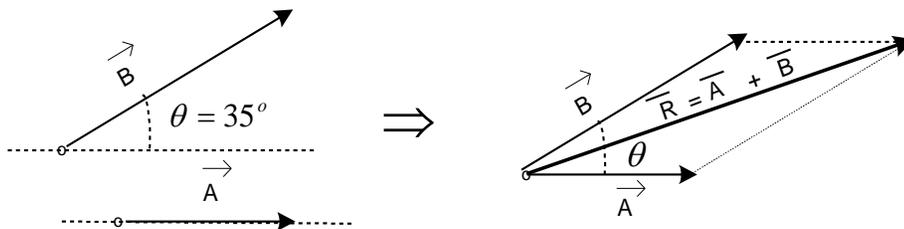
A los vectores se los puede sumar **gráfica y analíticamente**.

MÉTODOS GRAFICOS PARA SUMAR VECTORES

Para sumar vectores gráficamente se tiene:

a) MÉTODO DEL PARALELOGRAMO

Se usa para sumar dos vectores, consiste en construir un paralelogramo con los vectores, colocándolos de modo que sus orígenes coincidan. La resultante viene a ser la diagonal del paralelogramo, que parte del origen común de los vectores. Por Ej.: Sumar gráficamente los vectores:

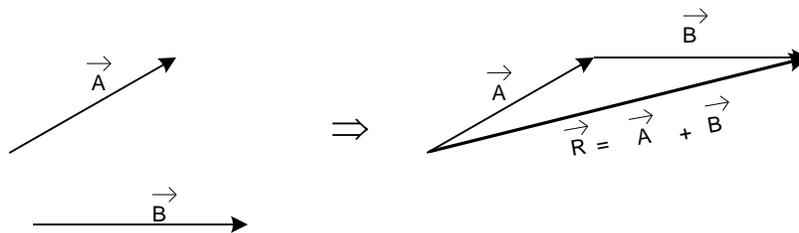


$$\vec{R} = \text{Vector resultante de } \vec{A} \text{ y } \vec{B}$$

b) METODO DEL TRIÁNGULO:

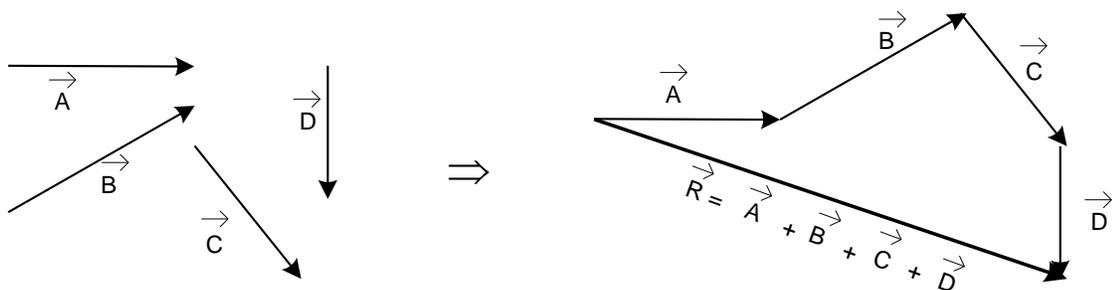
Consiste en formar un triángulo con los vectores dados colocando uno a continuación del otro, haciendo coincidir el origen del segundo vector con el extremo final del primer vector. La resultante se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo final del segundo.

Ejemplo: Sumar gráficamente los siguientes vectores:



c) METODO DEL POLIGONO

Se utiliza para sumar más de dos vectores. Consiste en colocar un vector a continuación del otro a partir del primero y la resultante se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo final del último vector. Por Ej.: Sumar gráficamente los siguientes vectores:



DIFERENCIA DE VECTORES

Es un caso particular de la suma de vectores. Si tenemos los vectores \vec{A} y \vec{B}

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

Ejemplo. Dados los vectores:

$$\vec{A} = 6 \text{ u N} \quad \text{y} \quad \vec{B} = 8 \text{ u E. Hallar } \vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$$

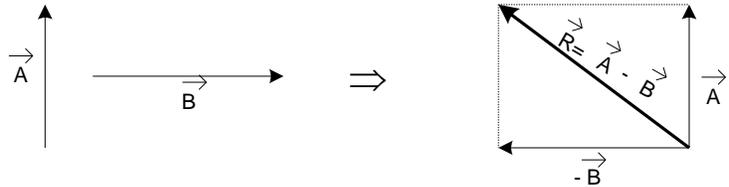
Solución gráfica: método del paralelogramo.

DATOS:

$$\vec{A} = 6 \text{ u N}$$

$$\vec{B} = 8 \text{ u E}$$

Escala 1cm = 2 u



MÉTODOS ANALÍTICOS PARA SUMAR VECTORES



Para sumar vectores analíticamente es necesario aplicar funciones y fórmulas trigonométricas sobre la base de la solución gráfica.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO:

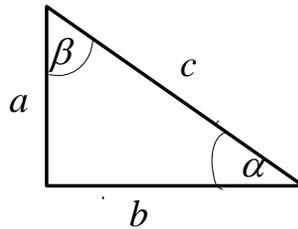
Es la razón entre los lados de un triángulo rectángulo. Las funciones o razones trigonométricas son: seno, coseno, tangente, (funciones directas), cotangente, secante, cosecante (funciones inversas). Nosotros solo tomaremos en cuenta las funciones directas.

Seno, relación entre el cateto opuesto y la hipotenusa. (sin)

Coseno, relación entre el cateto adyacente y la hipotenusa. (cos)

Tangente, relación entre el cateto opuesto y el cateto adyacente. (tan)

Sea el triángulo rectángulo:



Entonces las funciones trigonométricas del triángulo son:

Para el ángulo β :

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a}$$

Para el ángulo α :

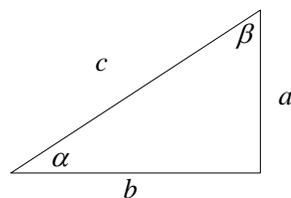
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

Es el que relaciona los lados de un triángulo rectángulo y dice: “El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

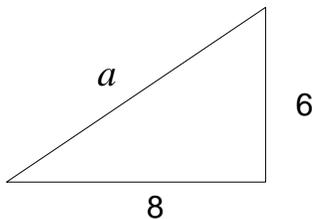
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Todo triángulo consta de seis elementos, tres lados y tres ángulos. Resolver un triángulo consiste en calcular tres de sus elementos conociendo los otros tres, siempre que uno de sus elementos sea un lado.

En el caso de triángulos rectángulos, uno de sus ángulos es recto, por tanto para resolver estos triángulos basta conocer dos de sus elementos, siempre que uno sea un lado. Se aplicarán las funciones trigonométricas directas y el teorema de Pitágoras, además recordar que la suma de sus ángulos agudos interiores da 90° .

- ☞ Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8.

Por el teorema de Pitágoras:



$$\begin{aligned} a^2 &= 8^2 + 6^2 \\ a &= \sqrt{8^2 + 6^2} \\ a &= \sqrt{64 + 36} \\ a &= \sqrt{100} \\ a &= 10 \end{aligned}$$

- ☞ En el triángulo rectángulo hallar todos los elementos.

Datos:

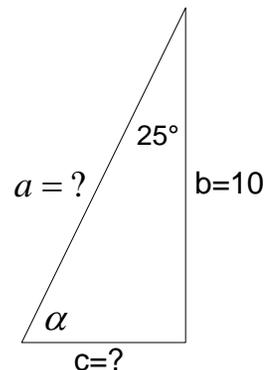
$$\beta = 25^\circ ;$$

$$b = 10$$

Incógnitas: $\alpha = ?$

$$a = ?$$

$$c = ?$$



Calculo de a por la función trigonométrica;

$$\cos 25^\circ = \frac{b}{a}$$

En esta igualdad conocemos el ángulo y el cateto b .

$$a \cdot \cos 25^\circ = b$$

Despejando a tenemos:

$$a = \frac{b}{\cos 25^\circ}$$

Reemplazando valores

$$a = \frac{10}{0,906}$$

Dividiendo ambos valores tenemos que:

$$a = 11,034$$

Calculo de c

$$\sin 25 = \frac{c}{a}$$

$$c = a \cdot \sin 25$$

$$c = 11,034 \cdot 0,423$$

$$c = 4,667$$

Calculo de α

$$\tan \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{10}{4,667} = 2,14$$

$$\alpha = \tan^{-1} 2,14$$

$$\alpha = 64,954$$

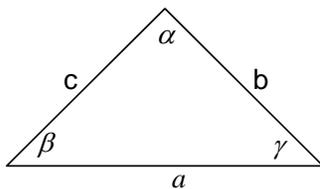
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUANGULOS

Triángulo oblicuángulo es aquel en que ninguno de sus ángulos es recto:

Para resolver triángulos oblicuángulos y cualquier triángulo se aplican preferentemente la “ley de senos “ y “ la ley de cosenos”.

a) LEY DEL SENO

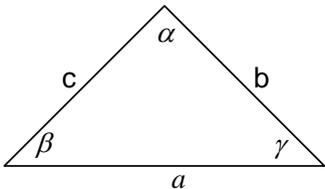
Esta ley dice: “En todo triángulo los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos”.



$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}$$

b) LEY DE LOS COSENOS

En todo triángulo, “el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de éstos por el coseno del ángulo que forman”.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Resolver el triángulo oblicuángulo se tiene:

Datos:

$$b = 10$$

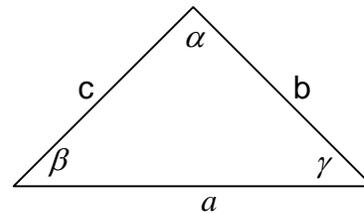
$$c = 8$$

$$\alpha = 74^\circ$$

Hallar: $a = ?$

$$\beta = ?$$

$$\gamma = ?$$



SOLUCIÓN:

Calculo de a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cos 74^\circ$$

$$a^2 = 100 + 64 - 44,10 = 119,9$$

$$a = \sqrt{119,9}$$

$$a = 10,95$$

Calculo de γ

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma = 180^\circ - 74^\circ - 61,39^\circ$$

$$\gamma = 44,61^\circ$$

Calculo de β

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

despejando

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \beta = \frac{10,95^2 + 8^2 - 10^2}{2 \cdot 10,95 \cdot 8} = 0,479$$

$$\beta = \cos^{-1} 0,479$$

$$\beta = 61,39^\circ$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cuando los vectores forman entre sí un ángulo de 90°

1.- Los vectores $\vec{A} = 30 \text{ Km al N}$ y $\vec{B} = 40 \text{ Km al O}$. Hallar la resultante de \vec{A} más \vec{B} y la dirección del mismo.

a) Solución gráfica : Método del paralelogramo

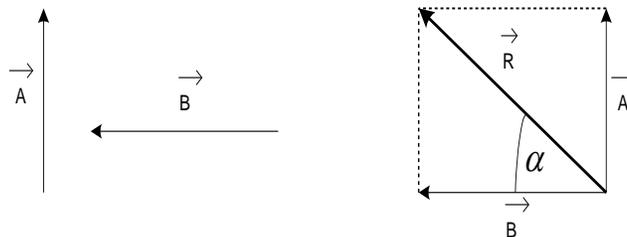
DATOS

$$\vec{A} = 30 \text{ Km al N}$$

$$\vec{B} = 40 \text{ Km al O}$$

$$\vec{R} = ?$$

$$\alpha = ?$$

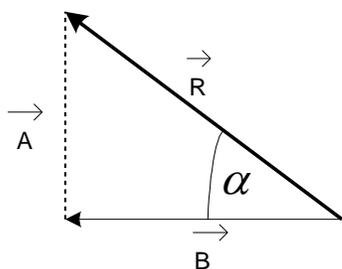


Escala 1cm = 10 Km

b) Solución analítica:

Como los vectores forman un ángulo de 90° entre sí, para hallar la resultante se aplica el **TEOREMA de PITÁGORAS** y para la dirección la función trigonométrica **TANGENTE**.

La resultante por el Teorema de Pitágoras:



$$|R|^2 = A^2 + B^2$$

$$|R| = \sqrt{(30 \text{ Km})^2 + (40 \text{ Km})^2}$$

$$|R| = \sqrt{900 \text{ Km}^2 + 1600 \text{ Km}^2}$$

$$|R| = \sqrt{2500 \text{ Km}^2}$$

$$|R| = 50 \text{ Km}$$

La dirección de la resultante por la función trigonométrica tangente:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{A}{B} \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{30\text{Km}}{40\text{Km}} = 0,75 \\ \alpha &= 36,87 \\ \alpha &= 36^{\circ}52'11'' \end{aligned}$$

2. Un barco navega hacia el norte con una velocidad de 20 nudos. Sabiendo que la velocidad de la marea es de 15 nudos y dirigida al oeste. ¿Calcular el módulo, dirección y sentido del vector resultante del barco en forma grafica y analítica?

a) Solución gráfica: Método del paralelogramo

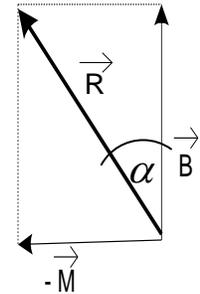
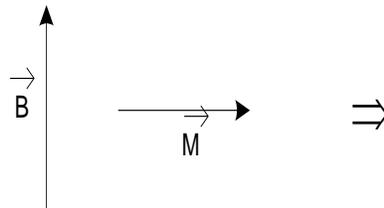
DATOS

$$\vec{V}_b = 20 \text{ nudos al N}$$

$$\vec{V}_m = 15 \text{ nudos al O}$$

$$\vec{R} = ?$$

$$\alpha = ?$$



Escala 1cm = 10 nudos.

b) Solución analítica

La resultante por el Teorema de Pitágoras:

$$|R|^2 = B^2 + M^2$$

$$|R| = \sqrt{(20\text{nudos})^2 + (15\text{nudos})^2}$$

$$|R| = \sqrt{400\text{nudos}^2 + 225\text{nudos}^2}$$

$$|R| = \sqrt{625\text{nudos}^2}$$

$$|R| = 25\text{nudos}$$

La dirección de la resultante por la función trigonométrica tangente:

$$tg \alpha = \frac{M}{B}$$

$$tg \alpha = \frac{15nudos}{20nudos} = 0,75$$

$$\alpha = 36,9^\circ$$

$$\alpha = 36^\circ 54' 0''$$

ACTIVIDADES

1. Un barco Navega hacia el sud con una velocidad de 6 nudos.

Sabiendo que la velocidad de la marea es de 3 nudos dirigida hacia el oeste, calcular el módulo, dirección y sentido del vector resultante del barco.

R.- 6,71 nudos, 25,56° SO

2. Un ciclista se dirige hacia el norte con una velocidad de 40 km/h. Sopla un viento fuerte hacia el oeste con una velocidad de 10 km/h. Calcular la velocidad aparente del viento sentido por el ciclista.

R. 41, 23 km/h, 14° NO

CUANDO LOS VECTORES FORMAN ENTRE SÍ UN ÁNGULO DIFERENTE A 90°

3.- Dos vectores de 36 u y 24 u forman entre sí un ángulo de 120°. Hallar el vector resultante de la suma de los vectores y la dirección del mismo.

a) Solución gráfica:

Datos:

$$\vec{A} = 36 \text{ u}$$

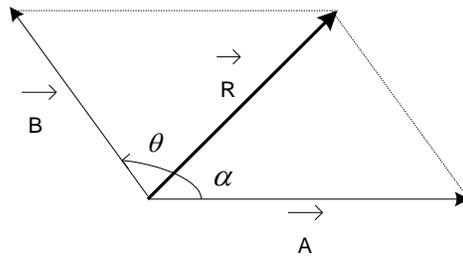
$$\vec{B} = 24 \text{ u}$$

$$\theta = 120^\circ$$

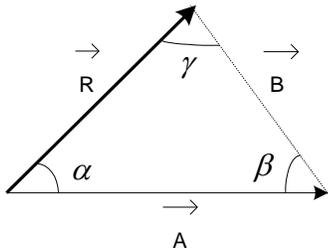
$$\vec{R} = ?$$

$$\alpha = ?$$

Escala 1cm = 6 u



b) Solución analítica:



Como los vectores forman un triángulo oblicuángulo, para hallar la resultante se aplica la **LEY de COSENOS** y para la dirección la **LEY de SENOS**.

La resultante por el teorema de cosenos

La dirección del vector resultante por la ley de senos

$$|R|^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \beta$$

$$|R|^2 = (36u)^2 + (24u)^2 - 2(36u)(24u)\cos 60$$

$$|R|^2 = 1296u^2 + 576u^2 - (1728u^2)(0,5)$$

$$|R| = \sqrt{1008u^2}$$

$$|R| = 31,75u$$

$$\frac{A}{\text{sen} \gamma} = \frac{B}{\text{sen} \alpha} = \frac{R}{\text{sen} \beta}$$

$$\frac{B}{\text{sen} \alpha} = \frac{R}{\text{sen} \beta}$$

$$\frac{24u}{\text{sen} \alpha} = \frac{31,75u}{\text{sen} 60}$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{24u \times \text{sen} 60}{31,75u} = 0,655$$

$$\alpha = 40,892$$

$$\alpha = 40^\circ 53' 30,60''$$

4.- Un barco se mueve a velocidad de 45 km/h en la dirección NO 40° en un lugar donde la corriente tiene la velocidad de 25 km/h en la dirección NO 60°. Hallar el vector de la velocidad resultante y su dirección.

a) Solución gráfica:

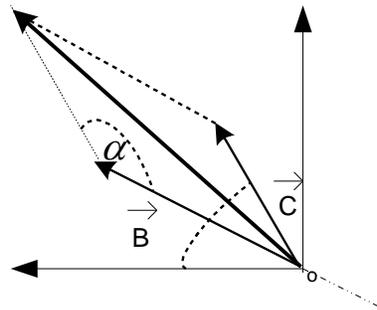
Datos:

$$\vec{B} = 45 \text{ Km/h NO } 40^\circ$$

$$\vec{C} = 25 \text{ Km/h NO } 60^\circ$$

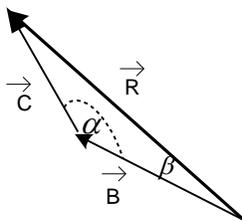
$$\vec{R} = ?$$

$$\alpha = ?$$



Escala 1cm = 10 Km/h

b) Solución analítica:



Como los vectores forman un triángulo oblicuángulo, para hallar la resultante se aplica la **LEY de COSENOS** y para la dirección la **LEY de SENOS**.

La resultante por el teorema de cosenos

$$|R|^2 = B^2 + C^2 + 2BC \cos \beta$$

$$|R|^2 = (45 \text{ Km/h})^2 + (25 \text{ Km/h})^2 + 2(45 \text{ Km/h})(25 \text{ Km/h}) \cos 20$$

$$|R|^2 = 2025(\text{Km/h})^2 + 625(\text{Km/h})^2 + (2250(\text{Km/h})^2)(0,94)$$

$$|R| = \sqrt{4764,31(\text{Km/h})^2}$$

$$|R| = 69,02 \text{ Km/h}$$

La dirección del vector resultante por la ley de senos

$$\frac{B}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{C}{\operatorname{sen}\beta}$$
$$\frac{R}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{C}{\operatorname{sen}\beta}$$
$$\frac{69,02\text{Km/h}}{\operatorname{sen}160} = \frac{25\text{Km/h}}{\operatorname{sen}\beta}$$
$$\operatorname{sen}\beta = \frac{25\text{Km/h} \times \operatorname{sen}160}{39,02\text{Km/h}} = 0,124$$
$$\alpha = 7,12^\circ$$
$$\alpha = 7^\circ 06' 58,82''$$

ACTIVIDADES

1.- Hallar el ángulo que forman dos vectores de 23 u y 15 u si se sabe que la suma de ellos tiene 30u.

R.- $77,78^\circ$

2.- Dos vectores forman entre sí un ángulo de 53° . Uno de ellos es 75 u y su resultante 300 u. Hallar la dirección de la resultante con respecto al vector horizontal.

R. $11,52^\circ$

3.- Un vector de 20 u hace un ángulo de 30° con la resultante cuyo valor es 24u. ¿Calcular el otro vector y el ángulo que le forma?

R.- 12,02u; $86,24^\circ$

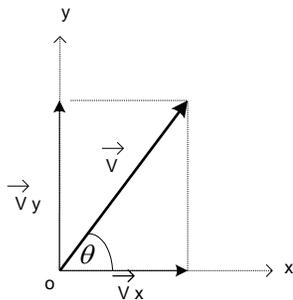
DESCOMPOSICIÓN DE VECTORES

COMPONENTES DE UN VECTOR

Todo vector puede considerarse como la resultante de otros vectores a los cuales se les llama “componentes del vector”.

COMPONENTES RECTANGULARES DE UN VECTOR:

Se llaman vectores rectangulares a los vectores componentes de un vector que forman entre sí un ángulo de 90°. Se trazan sobre los ejes de coordenadas X e Y.



\vec{V}_x, \vec{V}_y Componentes del vector \vec{V}

Por trigonometría:

$$\cos \theta = \frac{\vec{V}_x}{\vec{V}} \Rightarrow \vec{V}_x = \vec{V} \cos \theta \rightarrow \text{Módulo de la componente horizontal}$$

$$\text{sen} \theta = \frac{\vec{V}_y}{\vec{V}} \Rightarrow \vec{V}_y = \vec{V} \text{sen} \theta \rightarrow \text{Módulo de la componente vertical}$$

Para el módulo del vector resultante se aplicará:

$$\vec{V} = \sqrt{(\vec{V}_x)^2 + (\vec{V}_y)^2}$$

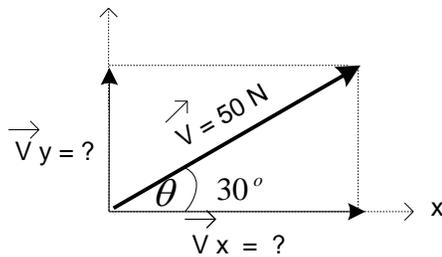
Para la dirección del vector resultante

$$\text{tg} \theta = \frac{\vec{V}_y}{\vec{V}_x}$$

EJEMPLO:

Determinar las componentes rectangulares del vector resultante cuyo módulo es 50 N, que forma un ángulo de 30° con la horizontal.

SOLUCIÓN:



Para la componente horizontal

$$\vec{V}_x = \vec{V} \cos \theta$$

$$\vec{V}_x = 50N \cos 30 = 43,3N$$

Para la componente vertical

$$\vec{V}_y = \vec{V} \operatorname{sen} \theta$$

$$\vec{V}_y = 50N \operatorname{sen} 30 = 25N$$

CALCULO DEL MÓDULO Y LA DIRECCIÓN DE LA RESULTANTE DE VARIOS VECTORES

Se sigue el siguiente procedimiento, basado en la descomposición rectangular:

- * Todos los vectores que se han de sumar se colocan en un sistema de ejes coordenados, ubicando todos los orígenes en el origen de coordenadas.
- * A cada vector se sustituye por sus componentes en los ejes X e Y .
- * Se realiza la suma algebraica con los componentes en cada eje coordenado, considerando positivo los que señalan hacia la derecha o arriba y negativos los que se señalan hacia abajo o a la izquierda.

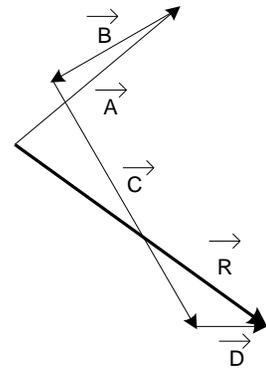
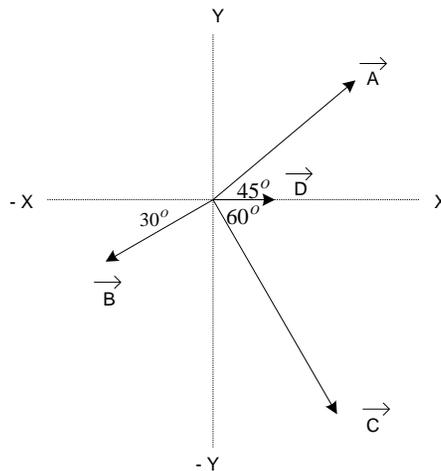
EJEMPLO:

Determinar la resultante y la dirección del siguiente sistema de vectores concurrentes por descomposición rectangular.

DATOS

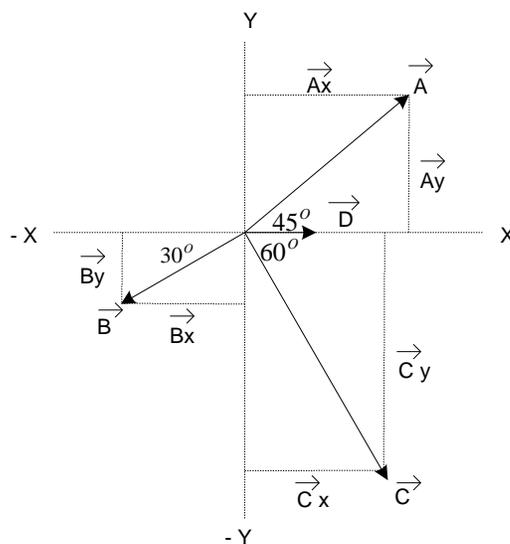
Solución gráfica: método del Polígono

- $\vec{A} = 90Kp$
- $\vec{B} = 60Kp$
- $\vec{C} = 120Kp$
- $\vec{D} = 30Kp$
- Esc : $1cm = 20Kp$



Solución analítica:

Cada vector se descompone en sus componentes rectangulares.



V E C T O R	COMPONENTES HORIZONTALES	COMPONENTES VERTICALES
\vec{A}	$\vec{A}_x = \vec{A} \cos 45 = 90 * 0,7 = 63,64Kp$	$\vec{A}_y = \vec{A} \text{sen}45 = 90 * 0,71 = 63,64Kp$
\vec{B}	$\vec{B}_x = -\vec{B} \cos 30 = -60 * 30 = -51,96Kp$	$\vec{B}_y = -\vec{B} \text{sen}30 = -60 * 0,5 = -30Kp$
\vec{C}	$\vec{C}_x = \vec{C} \cos 60 = 120 * 0,5 = 60Kp$	$\vec{C}_y = -\vec{C} \text{sen}60 = -120 * 0,87 = -103,9$
\vec{D}	$\vec{D}_x = \vec{D} = 30Kp$	$\vec{D}_y = 0Kp$
	$\sum \vec{R}_x = 101,68Kp$	$\sum \vec{R}_y = -70,28Kp$

La resultante total:

$$|R|^2 = R_x^2 + R_y^2$$

$$|R| = \sqrt{(101,68Kp)^2 + (-70,28Kp)^2}$$

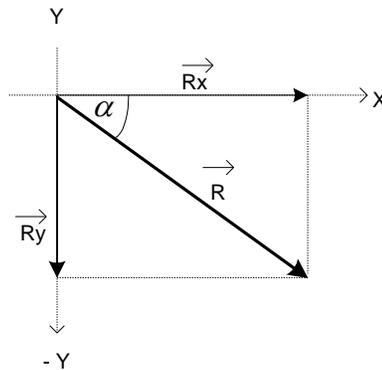
$$|R| = 123,61Kp$$

Para la dirección de la resultante

$$\text{tg } \alpha = \frac{\vec{R}_y}{\vec{R}_x}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{70,28Kp}{101,68Kp} = 0,69$$

$$\alpha = 34,65 = 34^\circ 36' 20,43''$$



ACTIVIDADES

1.- El vector resultante de dos vectores tiene 30 N y hace un ángulo de 25° y 50° con ellos. Hallar la magnitud de los dos vectores.

R. 23,8 N ; 13,3 N

2.-Un muchacho tira de una cuerda atada a un cuerpo con una fuerza de 50 Kp. La cuerda forma un ángulo de 35° con el suelo. Hallar el vector de la fuerza que tiende a elevar verticalmente el cuerpo.

R.- 28,7 Kp

3.- Descomponer un vector fuerza de 10 Kp en dos componentes perpendiculares de manera que la línea de acción de uno de ellos forme un ángulo de 45° con la del otro vector de 10 Kp.

R.- 7,07 Kp ; 7,07 Kp.

4.-Un poste de telégrafo esta soportado por un cable que ejerce una fuerza de 250 Kp sobre el extremo superior del mismo. Sabiendo que el cable forma con el poste un ángulo de 42° . ¿Calcular las componentes horizontales y verticales de dicho vector fuerza?

R.- 167,28 Kp ; 185,79 Kp

UNIDAD IV

ELECTRICIDAD

INDICADOR

**Reconoce las clases de electricidad conductores
para las instalaciones previas**

LA ELECTRICIDAD

INTRODUCCIÓN.

Observe:



Responda.

1. ¿Cómo se produce la electricidad?

R.-

2. ¿Para qué sirve la electricidad?

R.-

3. Tenemos corriente eléctrica en nuestra comunidad?

R.-

4. ¿Cuándo se produce un corte circuito?

R.-

5. Será correcto enchufar el radio con las manos húmedas?

R.-

6. Es recomendable ducharse cuando hay tormenta ¿Por qué?

R.-

7. Será correcto estar descalzo sobre un piso mojado ¿Por qué?

R.-

8. Qué pasa si un niño mete un dedo a los agujeros de toma corrientes?

R.-

Reunamos materiales para hacer un experimento.

- Papel, globo, peine.
- Papel estañado de una cajetilla de cigarrillos.

Realicemos el experimento y contestemos.

- Rompamos el papel en pequeños pedacitos y acerquemos el peine, después de peinarnos con él varias veces.

¿Qué sucede?.....

- Frotamos el globo inflado contra una chompa y Lugo acerquémoslo a la pared.

¿Qué pasa?.....

- Hagamos una bolita con el papel y luego acerquemos el peine después de peinarnos con él varias veces.

¿Qué sucede?

R.....
.....

Leamos

El peine y el globo cargan electricidad cuando los frotamos. Esta electricidad hace que otros objetos se pequen a ellos.

Podemos producir la electricidad de dos maneras:

- Al frotar rápidamente ciertos objetos. Por ejemplo, en una central eléctrica existen grandes turbinas que giran empujadas por un corriente de agua. Así producen electricidad.

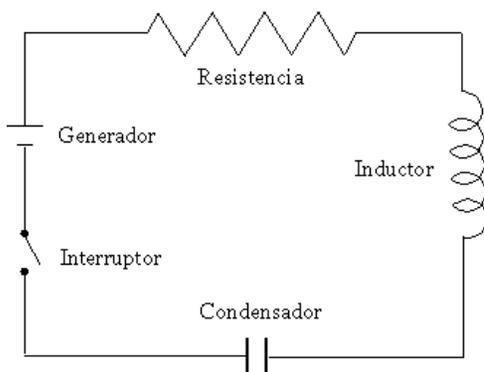
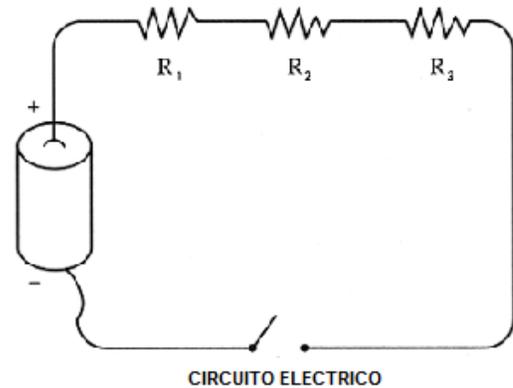
En varios pueblos existe corriente eléctrico, que llega a través de largos cables desde una central eléctrica. Pero hay aún muchos lugares donde todavía no llega la corriente eléctrica.

Lea.

La palabra electricidad deriva de la palabra griega “elektron” que significa ámbar, es un agente natural que se manifiesta por atracciones de masas cargadas de electrones.

Importante

La electricidad se transmite a través de un cable eléctrico. Los cuerpos que conducen la electricidad se llaman **Conductores Eléctricos**. El camino que recorre la electricidad, desde que sale de la pila hasta que vuelve a entrar en ella, se llama circuito eléctrico.



¿Cuáles son los elementos de un circuito?

Son:

El generador.- Produce electricidad, por ejemplo, una pila.

Los cables.- Sirven para conducir la corriente eléctrica.

El foco.- Tiene en su interior un cable muy fino llamado filamento que se pone al rojo vivo y emite luz y calor.

El interruptor.- Permite cerrar el paso a la corriente eléctrica. A través de él cierra el circuito.

Condensador.- Es un sistema de dos conductores de cualquier forma geométrica, tiene igual carga, pero de signo contrario, y están separados por un dieléctrico (aislante); se utilizan para almacenar carga eléctrica.

Inductor.- Que induce un circuito eléctrico, destinado a producir la producción magnética.

Importante

La corriente eléctrica es el flujo continuo de electrones por un conductor.

Los materiales que sirven como CONDUCTORES son:

Cobre	Zinc	Mercurio
Plata	Hojalata	Todos los materiales
Aluminio	Oro	Metálicos, etc.

Los materiales que no son conductores se les llaman AISLADORES O NO CONDUCTOR

Cristal	Goma o caucho
Porcelana	Plásticos, etc.
Madera seca	

Lea.

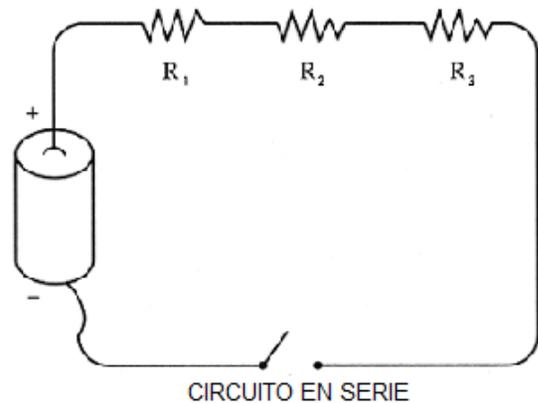
Nosotros no hacemos electricidad pues todo en la tierra contiene electrones. Lo único que hacemos es darle a los electrones un “empujón”.

Existen dos clases de circuitos:

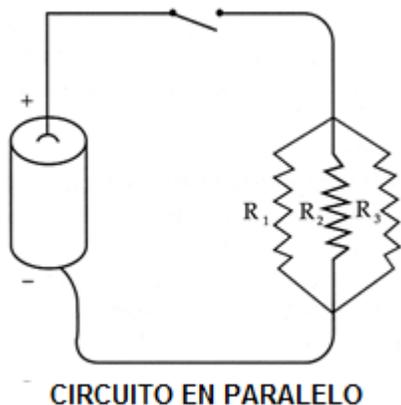
- Circuito en serie
- Circuito en paralelo

Circuito en Serie.

En un circuito en serie hay un solo “camino” para los electrones; lo cual tiene el inconveniente de que el circuito se interrumpe, si alguna de los focos se apaga.



Circuito en Paralelo.



Existen en este circuito tres “caminos” para los electrones. Y tiene, por consiguiente, la ventaja de que cada accesorio pueda funcionar separada o independientemente. Circuito en paralelo es el más usado en el domicilio.

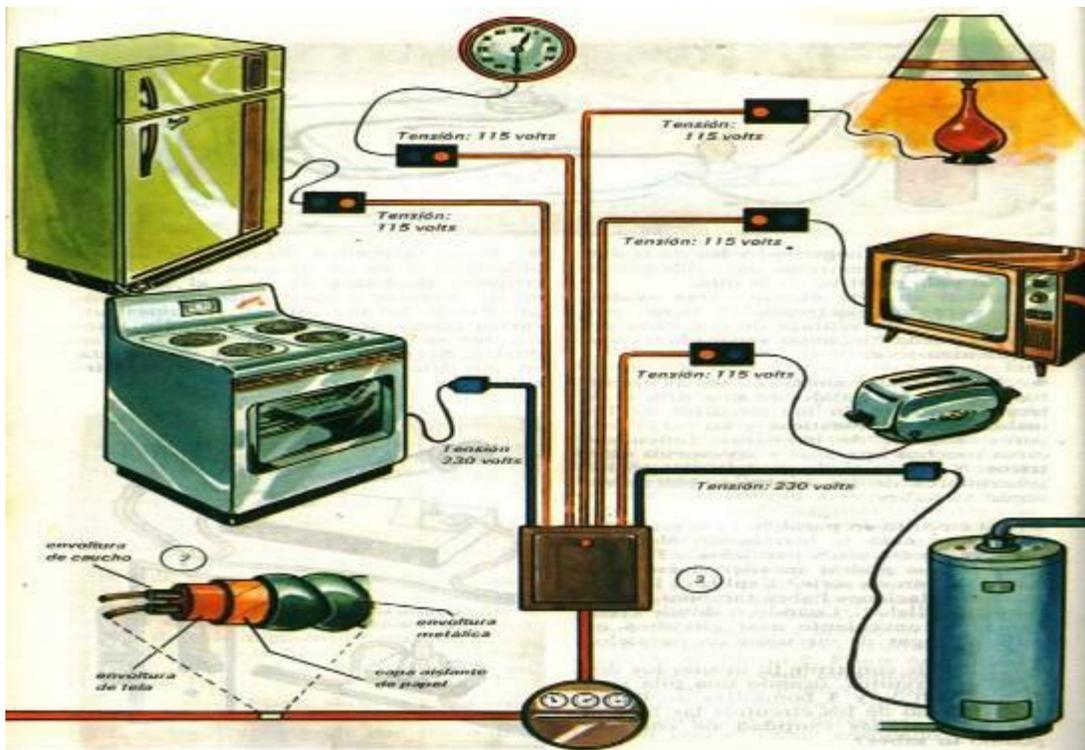
Corto Circuito.

En un corto circuito, al tocarse dos cables sin asilar, el contacto se establece entre los polos del generador sin que la corriente pase por el receptor. Entonces el circuito se cierra antes de tiempo. En tal caso la corriente apenas tiene resistencia; por lo que la misma fluye con mucha intensidad, produciendo una descarga que origina fuerte calor. De ahí que numerosos incendios sean causados por cortos circuitos.

Una corriente eléctrica reúne varias características que pueden ser medidas:

- El flujo de electrones por el conductor.
 - La fuerza que pone en movimiento a los electrones.
 - El grado de dificultad que experimentan los electrones durante su movimiento a través del conductor.
- LA UNIDAD DE MEDIDA** para el flujo de electrones se llama AMPERIO.
 - LA UNIDAD DE MEDIDA** para el voltaje recibe el nombre de VOLTIO.
 - LA UNIDAD DE MEDIDA** para la resistencia eléctrica es el OHM.

ELECTRICIDAD DOMICILIARIA.



¿Sabes de qué manera se encuentran dispuestos los circuitos eléctricos en tu casa?

En el gráfico se muestra esquemáticamente una posible instalación eléctrica doméstica:

✚ La corriente es conducida desde algún poste de la calle hasta el medidor (1). Fíjate en la estructura del cable (conductor principal) que conduce la corriente procedente del exterior (2). Del medidor el conductor principal pasa a la caja de fusibles (3). Estos sirven para proteger a la instalación. Así, en el caso de un corto, las laminillas de los fusibles se rompen por el intenso calor desarrollado y la corriente se interrumpe.

De la caja de fusibles parten otras ramas de cables muy diferentes en su estructura al cable principal. En la mayoría de las casas hay distintas clases de ramas conductoras, que forman diferentes circuitos. La corriente es generalmente de 20 amperios. Y en la mayoría de los circuitos, fluye una corriente con una tensión de 115 voltios. Es posible que algunos cables conduzcan corriente de 230 voltios.

Cada circuito está provisto de un dispositivo de seguridad que puede ser un fusible. El mismo es necesario por causa de la resistencia, la cual existe en cada conductor en grados diferentes. Esta resistencia aumenta a medida que aumenta la intensidad de la corriente.

Como sabes, este incremento de intensidad se debe al aumento del flujo de electrones.

Las numerosas colisiones que ocurren en tal caso entre los electrones causan que los átomos del conductor vibren con mayor rapidez y, entonces, el conductor se calienta. El grado de calentamiento puede resultar tan alto, que objetos cercanos al conductor mencionado corran el peligro de quemarse.

¿Qué es lo que motiva que la corriente aumente en intensidad? Una causa puede consistir en el hecho de que a una misma rama se conecte un excesivo número de accesorios eléctricos. Por ejemplo, de un mismo cable por causa de ignorancia pueden partir de conexiones correspondientes a una tostadora de pan, a una pequeña hornilla eléctrica y a una plancha. Con esto se provoca en el circuito una sobrecarga, que irá acompañada de una alta resistencia. Lógicamente dicho circuito se calentará mucho.

Anteriormente se ha estudiado un corto circuito. Pero éstos pueden ser causados también por el excesivo calentamiento de un conductor; porque la materia aislante se quema y los dos cables de que constan los conductores pueden entrar en contacto.

Cuando los cortos circuitos ocurren en sistemas provistos de fusibles, éstos evitan males mayores, como un incendio, por ejemplo, ya que al fundirse el fusible, la corriente deja de circular, como anteriormente se dijo.

El fusible fundido puede ser fácilmente reemplazado por otro nuevo con el propósito de que el fluido eléctrico circule de nuevo. Pero no debe procederse tan a la ligera. Cuando un fusible se inutiliza repetidas veces, es posible que exista algún defecto en la instalación; razón por la que es conveniente llamar a un electricista antes de poner entonces un fusible nuevo, a fin de que practique una revisión del o de los circuitos.

La electricidad creada por frotamiento se llama ELECTROSTATICA, las cargas eléctricas en los conductos, bajo forma de corriente eléctrica, constituyen la ELECTRODINAMICA.

Para su mejor estudio la electricidad se divide en:

ELECTROSTATICA Y ELECTRODINÁMICA.

ELECTROSTATICA

Actividad

Frote una vara de cristal con una pieza de tela de seda y el cristal se “cargara” de electricidad.

Frote una vela de cera, o goma, con lana, y se descubrirá que la cera de vela o la goma se “cargará”. Pruebas experimentales fáciles demuestran que ambos cargos son diferentes, aquella del cristal se la llama positiva y la de la cera o goma negativa. Pruebas siguientes podrán establecer entonces la primera ley de que:

Los cuerpos cargados con el mismo signo se repelen y los cargados con signo contrario se atraen.

Cuerpos con cargas de signos contrarios se atraen.

Cuerpos con cargas de signos iguales se repelan.

Mientras las cargas estén en reposo, se las llama: ELECTROSTATICA. Dichas cargas se las nota más frecuente cuando se mueven o “descargan”. Si te peinas tu pelo con un peine de goma o plástico, en la obscuridad, pueden oír el descargue así como también pequeñísimas chispas.

“Si se tiene dos pequeños cuerpos con cargas q_1 y q_2 separados por una distancia d , estas se atraen a se repiten con la fuerza F , que es directamente proporcional al producto de las cargas q_1 y q_2 e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d que las separa”.

$$F = K * \frac{q_1 * q_2}{d^2}$$

Importante

Donde:

F = Fuerza de atracción o de repulsión.

K = Constante de proporcionalidad que depende del medio ambiente y de las unidades

$q_1 q_2$ = Cargas eléctricas.

d = Distancia de separación entre las dos cargas.

$$K = 9 \times 10^9 \times \frac{Nm^2}{c^2}$$

Sistema internacional

$$K = \frac{1 \text{ din } \times \text{ cm}^2}{\text{ st } C}$$

Sistema cegesimal.

UNIDADES.

SISTEMAS	UNIDADES			
	Constante (K)	Distancia (d)	Fuerza (F)	Carga (q)
SI	$9 \times 10^9 \times Nm^2/c^2$	M	N	C
c.g.s.	$1 \text{ din } cm^2/stc^2$	Cm	din	stC

CARGA Y MASA DEL ÁTOMO.

PARTICULA	CARGA (C)	MASA (kg)
Protón	$+1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$	1.67×10^{-27}
Neutrón	0	$1,67 \times 10^{-27}$
Electrón	$-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	9.11×10^{-31}

EQUIVALENCIAS.

e = Carga eléctrica elemental	1 ves = 1stC = 1fr = $3.336 \times 10^{-10}C$
-e= Carga eléctrica de un electrón	1 e = $1.602 \times 10^{-19}C=4.80 \times 10^{-10}stC$
+e= Carga eléctrica de un protón	1C = $3 \times 10^9 stC$
v.e.s.= Unidad electrostática	$1 \mu C=10^{-6}C = 3 \times 10^3 stC$
stC= Statcoulombio	1Pc = $10^{-12}C$
fr = Franklin	1nC = $10^{-9}C$

Ahora aplicando las unidades y equivalencias resolvemos los siguientes ejercicios:

1.- Convertir $15 \times 10^{-6} N$ a *din*

$$15 \times 10^{-6} N * \frac{10^5 \text{ din}}{1 N} = 1,5 \text{ din}$$

2.- Convertir 30 stC a C

$$30 stC * \frac{1C}{3 \times 10^9 stC} = 10^{-8} C$$

3.- ¿A cuántos coulombios equivalen 5×10^{19} electrones?

$$5 \times 10^{19} e = 5 \times 10^{19} e * \frac{1.6 \times 10^{-19} C}{1e} = 8C$$

4.- Encuentra la equivalencia de 1stC a C

$$1stC = 1stC * \frac{1C}{3 \times 10^9 stC} = 3 \times 10^{-9} C$$

5.- ¿Cuál es la fuerza eléctrica de repulsión entre dos electrones cuya distancia de separación es 10^{-10} m?

Datos

$$q=1.6 \times 10^{-19}\text{C}$$

$$d=10^{-10}\text{m}$$

$$F = ?$$

Solución

$$\text{Sabemos que: } F = K \frac{q_1 * q_2}{d^2}$$

$$\text{Luego } F = K \frac{q^2}{d^2} = 9 * 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} * \frac{(1.6 * 10^{-19})^2 \text{C}^2}{(10^{-10})^2 \text{m}^2}$$

$$F = 2.3 \times 10^{-4} \text{ N}$$

A continuación de planteamos los siguientes ejercicios:

1.- Convertir 120 N a din

2.- Convertir 682 din a N

3.- Convertir 384 stC a C

4.- Convertir 536 C a stC.

5.- Dos cuerpos cargados con 30 y 50 stC, están separados una distancia de 31,62 cm. ¿Cuál es la fuerza de repulsión que los separa?

ELECTRODINÁMICA

Recuerda

Que la corriente eléctrica es el “flujo” a movimiento ordenado (dirigido) de las partículas cargadas a lo largo de un conductor ocasionado por la diferencia de potencial. Las únicas partículas que pueden desplazarse a lo largo de los conductores, debido a su pequeño tamaño, son los electrones, que como se sabe, son cagas de signo negativo.

NOTA

Debe entenderse claramente que el “flujo de electrones” no significa que algún electrón atraviesa totalmente el conductor, sino significa que los electrones se mueven de átomo en átomo y la transmisión se realiza por impulso o choque entre electrones.

Intensidad de corriente (I).- Es una magnitud escolar que nos indica la cantidad de carga que circula por un conductor en la unidad de tiempo (un segundo) su expresión matemática es:

$$I = \frac{q}{T} \dots\dots\dots(6-1)$$

Donde:

I = Intensidad de corriente.

q = Cantidad de electrones o masa eléctrica.

T = Tiempo en segundos.

UNIDADES DE LA INTENSIDAD.

S.I. Ampere (A)

c.g.s. stat – ampere

Equivalencias:

$$1A = 3 \times 10^9 \text{ stat – ampere}$$

$$1 \text{ stat – ampere} = 3.336 \times 10^{-10}A$$

	Amperios A	Miliamperios mA	Microamperios μA
1 Amperio =	1	10^3	10^6
1 Miliamperio =	10^{-3}	1	10^3
1 Microamperio =	10^{-6}	10^{-5}	1

UNIDADES.

<i>SI Ohm (Ω)</i>

EQUIVALENCIAS.

$$1\Omega = 1.113 \text{ statohm}$$

$$1 \text{ stat – ohm} = 9 \times 10^{+11} \Omega$$

A continuación resolvemos los siguientes ejercicios:

- ¿Qué intensidad tiene la corriente eléctrica que pasa por un alambre si por una sección transversal de él pasan 12.5×10^{15} electrones en 1 minuto y 40 segundos?

Datos:

$$q = 12.5 \times 10^{15}e$$

$$t = 1' 40''$$

$$I = ?$$

Por otra parte: $1e = 1.6 \times 10^{-19}C$

Luego de la ecuación (6-1)

$$I = \frac{q}{T} = \frac{12.5 \times 10^{15} \times 1.6 \times 10^{-19} C}{100s}$$

$$I = 2 \times 10^{-5} A$$

Sabemos que 1 min tiene 60 s por

Tanto el tiempo total es:

$$T = 60_s + 40_s = 100_s$$

2. ¿Cuántos electrones pasan por una sección transversal de un conductor en 2.5 minutos si la intensidad es de $8 \mu A$?

Datos:

$$T = 2.5 \text{ min}$$

$$I = 8 \mu A$$

$$N_e = ?$$

SOLUCIÓN.

Conversión de unidades:

$$2.5 \text{ min} = 2.5 \text{ min} \times \frac{60_s}{1 \text{ min}} = 150_s$$

Por la ecuación (6 - 1)

$$q = I \cdot t = 8 \times 10^{-6} \text{ A} \times 150_s = 12 \times 10^{-4} \text{ C}$$

Luego el número de electrones es:

$$N_e = 12 \times 10^{-4} \text{ C} * \frac{1e}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}}$$

$$N_e = 7.5 \times 10^{15} \text{ electrones.}$$

3. Una bombilla de 120V absorbe 1.6A. Calcular su resistencia.

Datos:

$$V = 120 \text{ V}$$

$$I = 1.6 \text{ A}$$

$$R = ?$$

Solución

Según la ecuación (6 - 5)

$$R = \frac{V}{I} = \frac{120 \text{ V}}{1.6 \text{ A}} = R = 75 \Omega$$

Ahora en tu cuaderno de aplicación resolverás los siguientes ejercicios.

1. Calcular la intensidad de una corriente sabiendo que la carga eléctrica es de 3000C y el tiempo que dura el pasaje es de 5 minutos.
2. Por un conductor circula durante 15 minutos 54×10^{22} electrones. Calcular la intensidad de esa corriente.
3. Qué cantidad de corriente en coulombios habrá pasado por un conductor en 30 minutos? Si la intensidad de la corriente es de 15A.

UNIDAD V

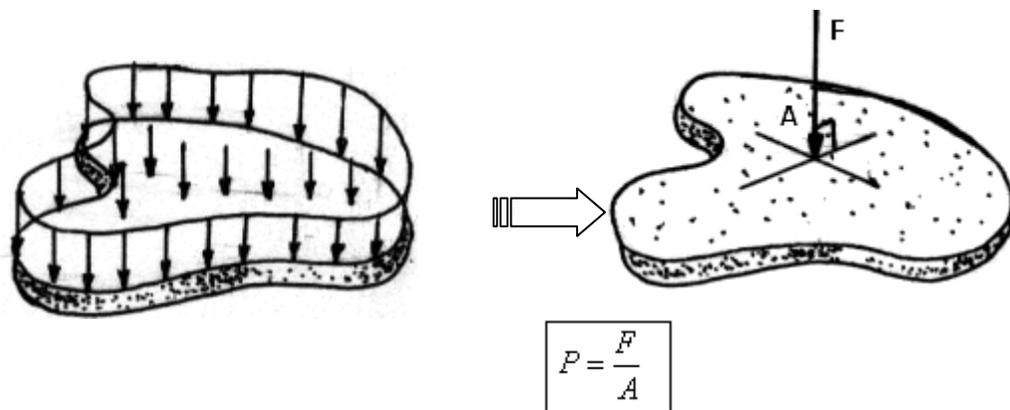
HIDROSTATICA

INDICADOR

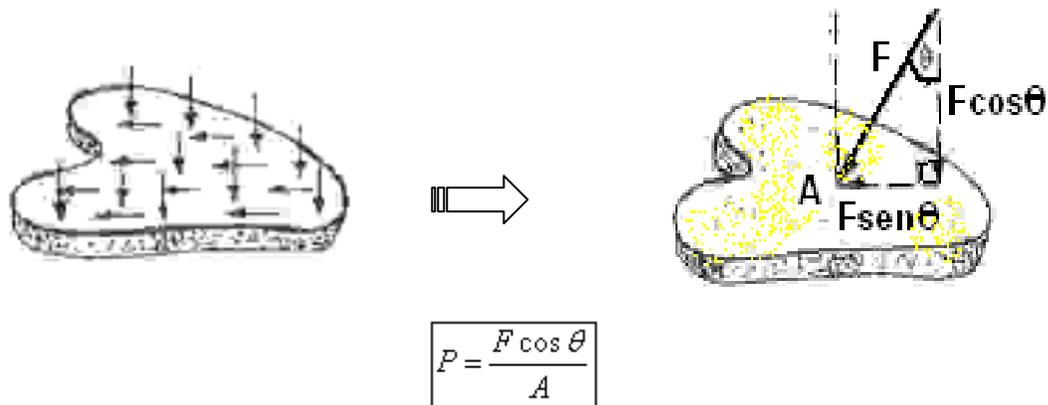
Interpreta el Principio de Pascal y de Arquímedes tomando en cuenta materiales del contexto.

LA PRESIÓN

Que representa “**La intensidad de la fuerza que se ejerce sobre cada unidad de área de la superficie considerada, cuando mayor se la fuerza que actúa sobre una superficie dada, mayor será la presión y cuanto menor sea la superficie para una fuerza dada, mayor será entonces la presión resultante**”



La fuerza oblicua tiene dos componentes una de ellas actúa perpendicularmente y es la que ejerce presión en cambio la componente paralela a la superficie produce componentes tangenciales que generalmente son de rozamiento.



En conclusión: “**La presión es ejercida por fuerzas perpendiculares a la superficie**”.

Pero existen diferencias entre fuerza y presión:

UNIDADES DE PRESIÓN:

- Por la definición de presión (**$P = F/A$**) vemos que su unidad debe estar dada por la relación entre una unidad de fuerza y una unidad de fuerza y una unidad de área. En el **SI** la unidad de fuerza es **1N** y la de área, **1m²**. Entonces en el sistema la unidad de presión será **1N/m²**.
- En la práctica, los ingenieros y los técnicos suelen emplear la unidad **1Kgf/cm²**. En máquinas y aparatos de fabricación inglesa, se usa también la libra por pulgada cuadrada (**lb. /plg²**) como unidad de presión.

En conclusión: *Si tenemos 2Kg/cm² de presión. Significa que por cada cm² de superficie actúa una fuerza de 2kg.*

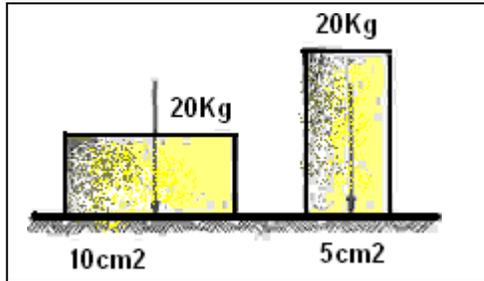
Para aplicar una fuerza y generar una presión en los líquidos es necesario conocer la densidad y el peso específico de las sustancias

DIFERENCIA ENTRE FUERZA Y PRESION:

Como suelen confundirse, conviene conocer la diferencia. Los ejemplos que siguen la señalarán.

a) **Fuerzas iguales pueden producir presiones diferentes**

Sean dos prismas de 20Kg pero uno con 10cm² de base, y el otro con solo 5cm².



$$P_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{20Kg}{10cm^2} = 2Kg / cm^2$$

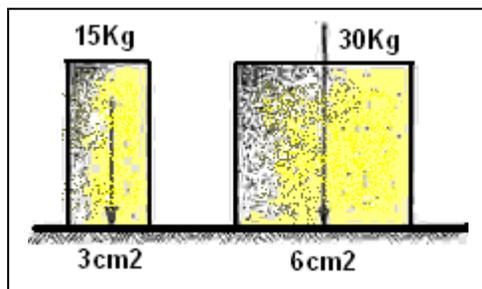
$$P_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{20Kg}{5cm^2} = 4Kg / cm^2$$

$$P_2 > P_1$$

Evidentemente resulta entonces que no es lo mismo fuerza que presión, ocurre que la igualdad de fuerzas con distintas bases provocan diferentes presiones.

b) Fuerzas diferentes pueden producir presiones iguales:

Si se tienen dos primas de diferentes pesos: El primero pesa 30Kg y su base mide 6cm²; el segundo pesa 15Kg y su base mide 3cm² calculemos las presiones ejercidas sobre cada base



$$P_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{30Kg}{6cm^2} = 5Kg / cm^2$$

$$P_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{15Kg}{3cm^2} = 5Kg / cm^2$$

$$P_2 = P_1$$

Se puede comprobar que a diferentes pesos y distintas bases producen presiones iguales.

Para determinar las unidades de equivalencias es necesario conocer, puesto que son de gran significación.

ACTIVIDADES

1.- Considere un joven de 60Kg-f de peso, que está de pie en el piso de una sala.

- Estando descalza, el área total de apoyo de sus pies sobre el suelo es de 105cm^2 . ¿Qué presión está ejerciendo sobre el piso?

- Si tuviera puestos “zapatos para nieve”, su área total de apoyo sería de 600cm^2 . En este caso, ¿Cuál sería la presión sobre el suelo?

2.- Suponga que el joven del ejercicio anterior usará zapatos con tacones muy agudos (puntiagudo). Considere el área de base de cada tacón igual a 1 cm^2 , y que la mitad del peso de la joven se distribuye sobre los tacones.

- ¿Qué presión ejercen éstos sobre el suelo?

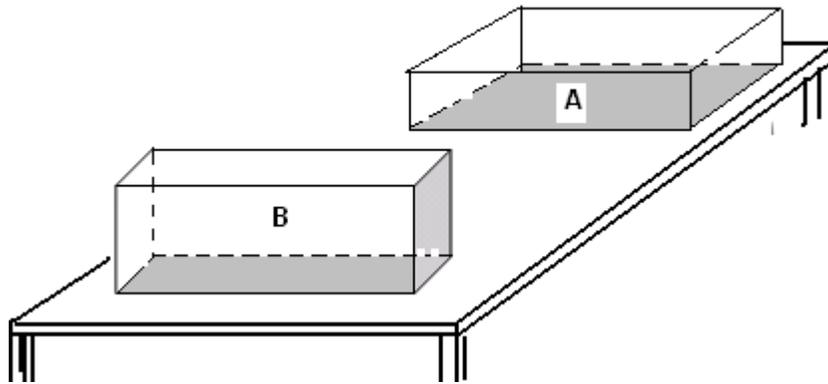
- Compare la respuesta del primero con los resultados del ejercicio anterior, y explique por qué los tacones muy delgados causan estragos en los pisos de madera.

3.- El área total de apoyo de los cimientos de un edificio es de 200 m^2 .
Un ingeniero informa que el suelo bajo los cimientos soporta una presión de
de
 40 Kg.-f/cm^2 .

- Exprese en cm^2 el área de apoyo de la cimentación:

- Calcule el peso del edificio:

4.- Un ladrillo fue colocado sobre una mesa, apoyado inicialmente como se muestra en la figura **A**, y posteriormente en la posición **B** (véase figura de este ejercicio).



- La fuerza con la cual el ladrillo comprime la mesa en la posición A, ¿Es igual, menor o mayor que en B?

- La presión que el ladrillo ejerce sobre la mesa en A, ¿es igual, menor o mayor que en B?

DENSIDAD(ρ)

Por ende la densidad es una magnitud escalar cuyo valor nos indica la masa por unidad de volumen que posee un cuerpo.

$m = \text{Masa de la sustancia}$

$v = \text{Volumen}$

$$\rho = \frac{m}{v}$$

Unidades: $\text{Kg} / \text{m}^3, \text{g} / \text{cm}^3, \text{lb} / \text{pulg}^3, \text{etc.}$

Sin embargo, la densidad de un material sólido o líquido, es constante a una misma temperatura, independientemente de la forma y el tamaño del cuerpo. Sin embargo cuando los cambios de temperatura sean pequeños, como los que ocurre normalmente en el medio ambiente, las variaciones que sufre la densidad son despreciables y se puede considerar que esta se mantiene constante, en cambio el:

PESO ESPECÍFICO (δ)

Es una magnitud escalar que se define como el cociente del peso de un cuerpo entre su volumen.

$w = \text{Peso}$

$v = \text{Volumen}$

$$\delta = \frac{w}{v}$$

Y se tiene una relación entre el **Peso Específico y la Densidad**

$$\rho = \frac{m}{v} \dots\dots\dots (1) \quad , \quad \delta = \frac{w}{v} \dots\dots\dots (2)$$

Como $w = m \times g$, reemplazando en (2):

$$\delta = \frac{mg}{v} = \left(\frac{m}{v} \right) \times g$$
$$\delta = \rho \times g$$

Nótese que la densidad y el peso específico guardan la misma relación que el peso y la masa. Por tanto la densidad y el peso específico son numéricamente iguales cuando se tienen en sistemas diferentes es decir:

$$\delta_{(M.K.S.)Absoluto} = \rho_{(M.K.S.)Tecnico}$$

Por ejemplo, si la densidad de un cuerpo es $\rho = 2g/cm^3$ su peso específico será $2g/cm^3$.

Llegando a la tabla de pesos específicos de los líquidos

TABLA DE PESOS ESPECÍFICOS DE LOS LÍQUIDOS

Sustancia	Peso Específico (g/cm^3)
<i>Aceite de oliva</i>	11.3
<i>Agua</i>	1.00
<i>Agua de mar</i>	1.025
<i>Alcohol etílico</i>	0.81
<i>Benceno</i>	0.90
<i>Glicerina</i>	1.26
<i>Mercurio</i>	13.6

La tabla de pesos específicos de los líquidos, esta en directa relación con las propiedades de los fluidos como es el agua, que a 4° C el peso específico es de $1gr/cm^3$, $1000 kg/cm^3$.

A continuación se da a conocer las características principales de los líquidos:

TRANSMISIÓN DE FUERZAS POR LOS SÓLIDOS Y PRESIONES POR LOS LÍQUIDOS:

a) Diferencias básicas entre sólidos y líquidos:

- Los sólidos tienen volumen y forma definida, mientras que los líquidos solo tienen volumen definido y su forma es variable, adoptando la del recipiente que los contiene.
- Un sólido transmite la fuerza que se ejerce sobre él en la misma dirección de dicha fuerza, en cambio un líquido transmite las presiones ejercidas sobre él en todas las direcciones y sentidos.

Veamos un ejemplo que ilustra esta segunda diferencia básica entre sólidos y líquidos.

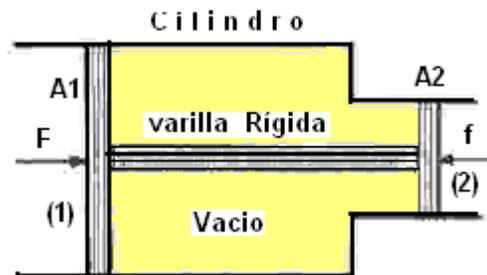
Si tenemos un aparato con secciones diferentes como se muestra en la figura.

Datos:

$$A_1 = 200\text{cm}^2$$

$$A_2 = 20\text{cm}^2$$

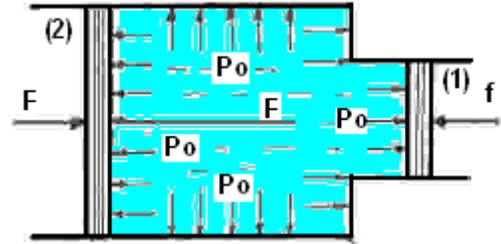
$$f = 10\text{Kg}$$



- Si sobre el pistón chico **(2)** aplicamos una fuerza de 10Kg para equilibrar el sistema, (varilla más pistones), debe ejercerse sobre el pistón grande **(1)** una fuerza de, 10Kg lo cual implica que la varilla ha transmitido la fuerza.

En consecuencias “los sólidos transmiten fuerzas”.

- Saquemos la varilla que une los pistones y llenemos con agua el cilindro. Si volvemos a aplicar la fuerza $f = 10Kg$ sobre el pistón chico ¿qué fuerza "F" se requiere para equilibrar el sistema?



Sobre el pistón chico la fuerza "F" genera una presión:

$$P_o = \frac{f}{A_1}$$

$$P_o = \frac{10kg}{20cm^2} = 0,5kg/cm^2$$

Por el principio de Pascal, esta presión se transmite en todas direcciones a todos los puntos internos de líquido a las paredes del recipiente que los contiene, luego sobre el pistón grande (1) se tiene una fuerza "F" generada por el líquido.

$$F = P_o \times A_1 = 0.5Kg/cm^2 \times 200cm^2$$

$$F = 100Kg$$

¿Cómo es posible que 10Kg se transforme en 100Kg ?

¿De dónde salieron los 90Kg restantes?

Simplemente, **“por que los líquidos transmiten presiones y no fuerzas es una propiedad de los líquidos tan característica que se la puede tomar como definición de líquido”.**

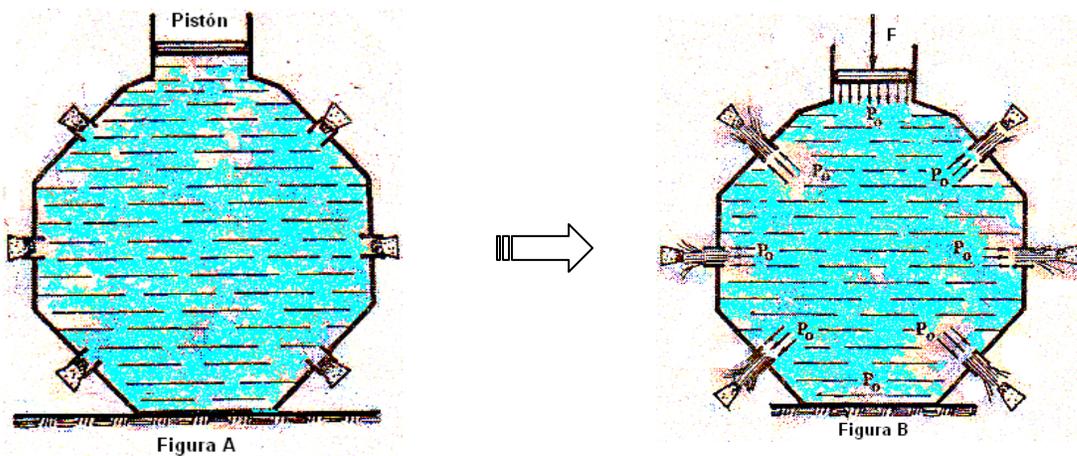
Es una propiedad como la de adoptar su forma a la del recipiente que lo contiene aunque más sorprendente, porque estamos menos familiarizados con ella.

En los anteriores párrafos se pudo apreciar las propiedades de los líquidos a cuya teoría se agrega el Principio de Pascal:

EL PRINCIPIO DE PASCAL

Cuando un líquido es sometido a una cierta presión, el líquido transmitirá en todas direcciones la misma intensidad de presión perpendicular de los puntos de las paredes del depósito que lo contienen.

“La presión ejercida en un punto de una masa líquida se transmite con igual intensidad en todas las direcciones y sentidos”



En la figura “A” se tiene un recipiente al que se le ha hecho orificios, los cuales han sido cerrados para poder llenar con agua el recipiente. El sistema está en reposo.

En la figura “B”, sobre el pistón se aplica una fuerza “F” generándose una presión “Po” la cual se transmite al interior del líquido y a las paredes del recipiente que lo contiene, sin variar su valor, haciendo saltar los tapones.

Como consecuencia del Principio de Pascal se desarrollo durante la historia diferentes tipos de aparatos hidráulicos el cual se da a conocer:

LA PRENSA HIDRAULICA:

Se define como, ***“Un dispositivo mecánico o máquina simple que sirve para multiplicar el valor de una fuerza y constituye la aplicación más importante del principio de Pascal”***

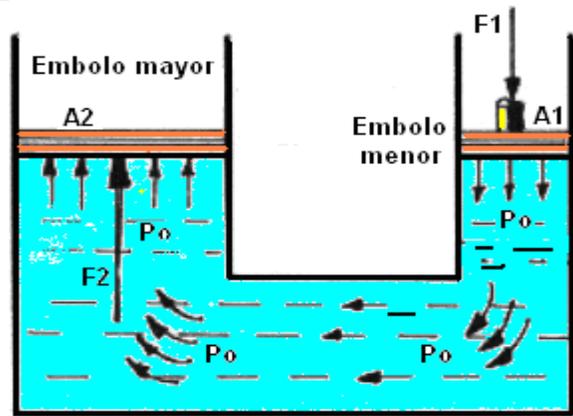
Es una aplicación del Principio de Pascal y de los vasos comunicantes, así como de la propiedad de los líquidos de transmitir presiones.

Esta formado por dos cilindros comunicados entre sí como se muestra en la figura, los cuales son llamados por un líquido y cerrado herméticamente mediante pistones símbolos.

En el embolo menor se aplica la fuerza " F_1 " y en el embolo mayor aparece la " F_2 " que ejercida por el líquido y mucho mayor que " F_1 ". De esta manera se puede levantar cuerpos de peso considerable colocados en el embolo mayor, mediante la aplicación de fuerzas en el embolo menor.

$A_1 = \text{Área del embolo menor}$

$A_2 = \text{Área del embolo mayor}$



Debido a la aplicación de la fuerza " F_1 " en el embolo menor se genera una presión " P_0 "

$$P_0 = \frac{F_1}{A_1} \text{ ---- (1)}$$

La cual se transmite en todas las direcciones, es decir, también es transmitida al embolo: mayor.

$$P_0 = \frac{F_2}{A_2} \text{ ----- (2)}$$

Igualando (1) y (2) se tiene:

$$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1}$$

Lo que quiere decir que: **“Las fuerzas en los émbolos de una prensa hidráulica son directamente proporcionales a sus áreas”**.

Despejando " F_2 ", tenemos que:

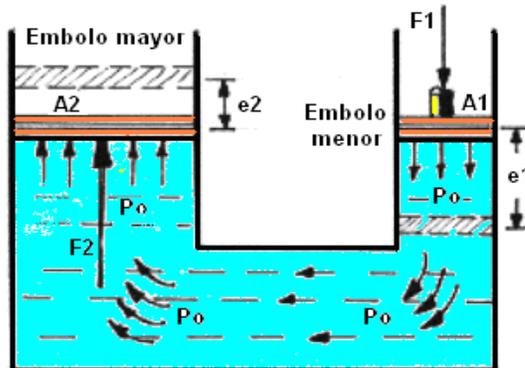
$$F_2 = \left(\frac{A_2}{A_1} \right) F_1$$

Como:

$$\boxed{A_2 \triangleright A_1}$$

$$\frac{A_2}{A_1} > 1 \Rightarrow F_2 > F_1$$

2.3.6. ANÁLISIS DEL DESPLAZAMIENTO DE LOS ÉMBOLOS:



$e_1 =$ **Espacio recorrido por el embolo menor**

$e_2 =$ **Espacio recorrido por el embolo mayor**

El volumen del líquido desplazado por el embolo menor, debe ser el mismo que desplace el embolo mayor.

$$V_1 = A_1 \times e_1 \quad (\text{Volumen desplazado en el embolo menor})$$

$$V_2 = A_2 \times e_2 \quad (\text{Volumen desplazado en el embolo mayor}).$$

$$V_1 = V_2$$

Reemplazando:

$$A_1 \times e_1 = A_2 \times e_2$$

$$\frac{e_1}{A_2} = \frac{e_2}{A_1}$$

Lo que indica es que **“El desplazamiento de los émbolos de una prensa hidráulica son inversamente proporcionales a las áreas”**.

Despejando " e_2 ":

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow e_2 = \left(\frac{A_1}{A_2} \right) e_1$$

Como:

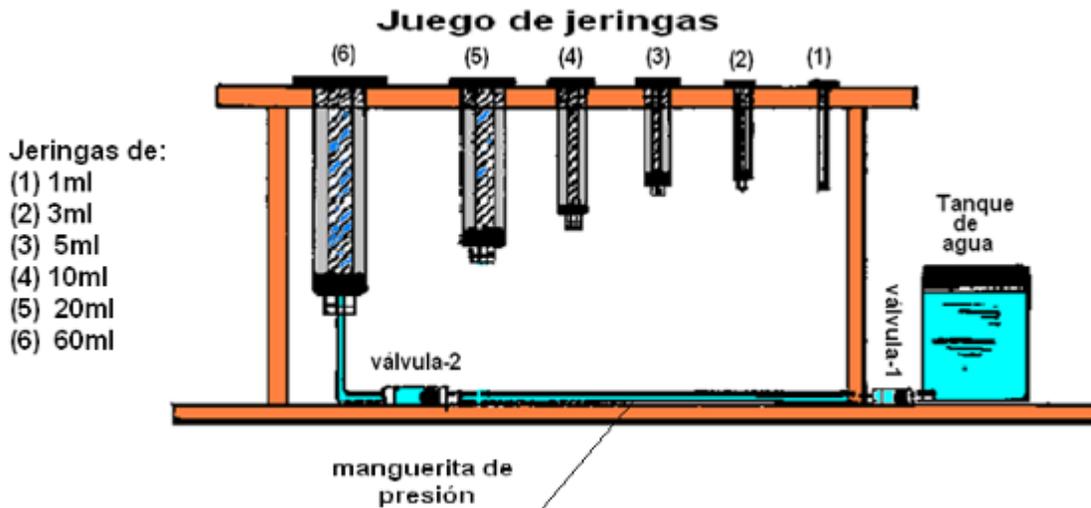
$$\boxed{A_1 < A_2}$$

$$\frac{A_1}{A_2} < 1 \Rightarrow e_2 < e_1$$

Esto indica que **“Se gana en fuerza se pierde en recorrido, se sacrifica el espacio recorrido lo cual no interesa”**.

ACTIVIDAD EXPERIMENTAL

ELABORACIÓN Y APLICACIÓN DE LA GATA HIDRÁULICA



Se trata de un aparato o dispositivo hidráulico que mediante el empleo de un líquido, sea agua, o aceite, multiplica la fuerza aplicada en un extremo al hacer pasar el fluido a través de un émbolo amplio a uno más estrecho, todo funcionamiento esta bajo el Principio de Pascal.

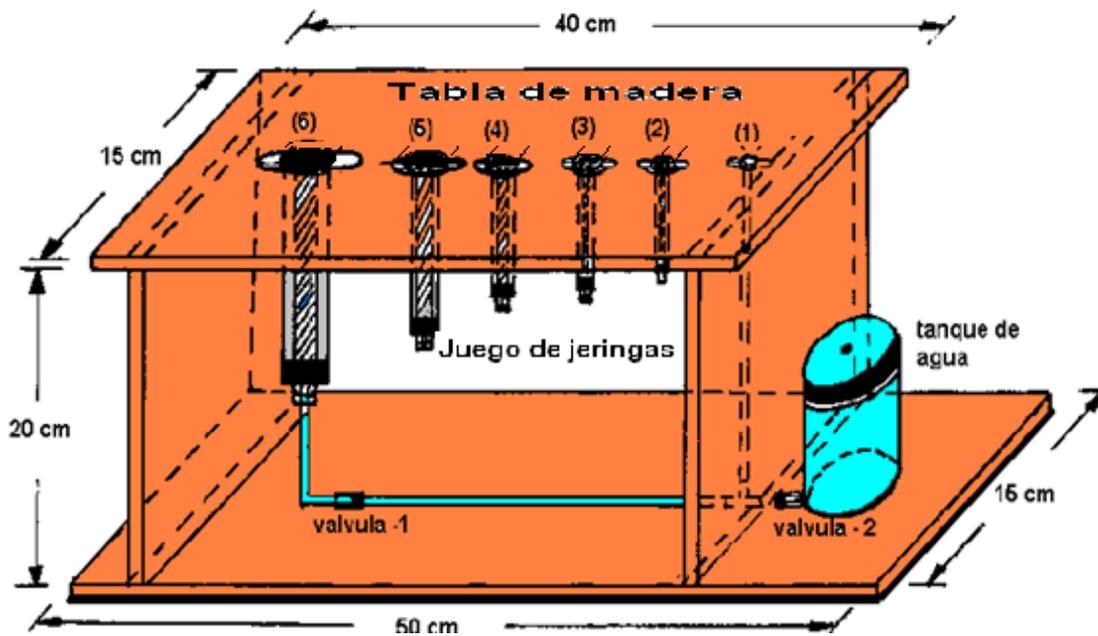
DESCRIPCIÓN

El aparato hidráulico consta con dos bases estables de madera, las partes movibles de los émbolos funcionan hidráulicamente, accionadas a partir de seis jeringas de diferentes diámetros conectadas a una de las bases de madera a través de orificios y para el movimiento del fluido esta constituido de una manguerita de presión, un tanque de agua y dos válvulas.

MATERIALES DE ELABORACIÓN

- 5 jeringas
- Madera
- Agua
- Pesetas de 4 y 6kg
- Clavos
- 2 perdigones
- Un pequeño tanque
- Silicona
- Manguerita de presión

ESQUEMA GRÁFICO DEL ANÁLISIS FÍSICO:

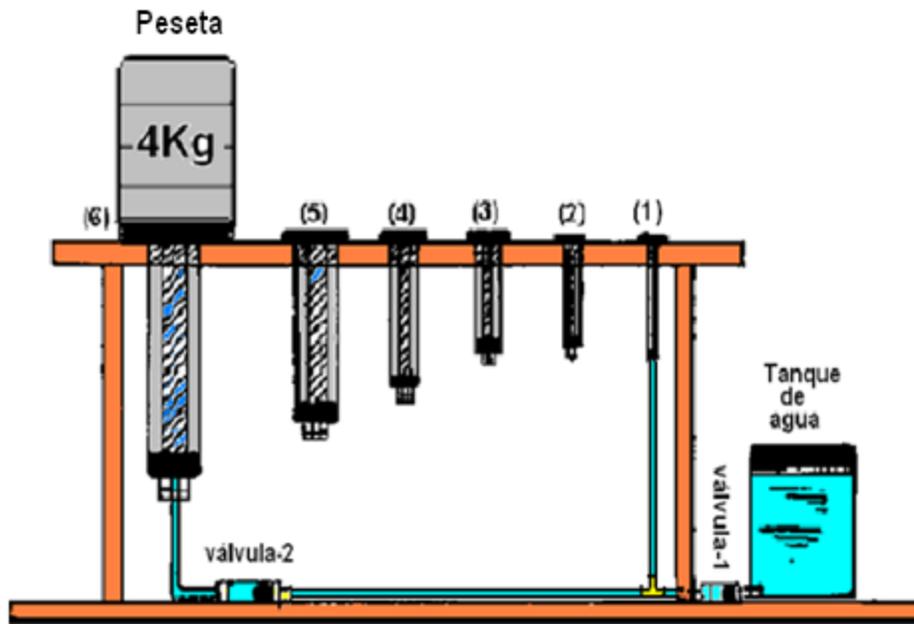


ANÁLISIS FÍSICO-MATEMÁTICO:

Experiencia: Si aplicamos un peso de 4Kg en el embolo (6) de 3cm de diámetro y accionando un cierta fuerza en el embolo de (1) de 0.30cm de diámetro ¿Cuál será la fuerza mínima para levantar el objeto?

Datos: **incógnitas**

$W_{cuerpo} = 4Kg$ $F_1 = ?$
 $d_6 = 3cm$ $P_1 = ?$
 $d_1 = 0.30cm$



Sabemos que la presión es:

$$P = \frac{F}{A}$$

$$P_1 = \frac{F_1}{A_1}$$

Como también la

$$P_6 = \frac{F_6}{A_6}$$

Bajo el Principio de Pascal, que dice **“La presión ejercida se transmite con igual intensidad en toda las direcciones y sentidos”**.

Sabemos que:

$$P_1 = P_6$$

Reemplazando:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_6}{A_6}$$

Despejando F_1 :

$$F_1 = \left(\frac{A_1}{A_6} \right) F_6$$

$$F_1 = \left(\frac{\frac{\pi \times d_1^2}{4}}{\frac{\pi \times d_6^2}{4}} \right) F_6 = \left(\frac{\pi \times d_1^2}{\pi \times d_6^2} \right) F_6$$

$$F_1 = \left(\frac{d_1}{d_6} \right)^2 F_6$$

Reemplazando:

$$F_1 = \left(\frac{0.30 \text{ c}\eta}{3 \text{ c}\eta} \right)^2 4 \text{ Kg}$$

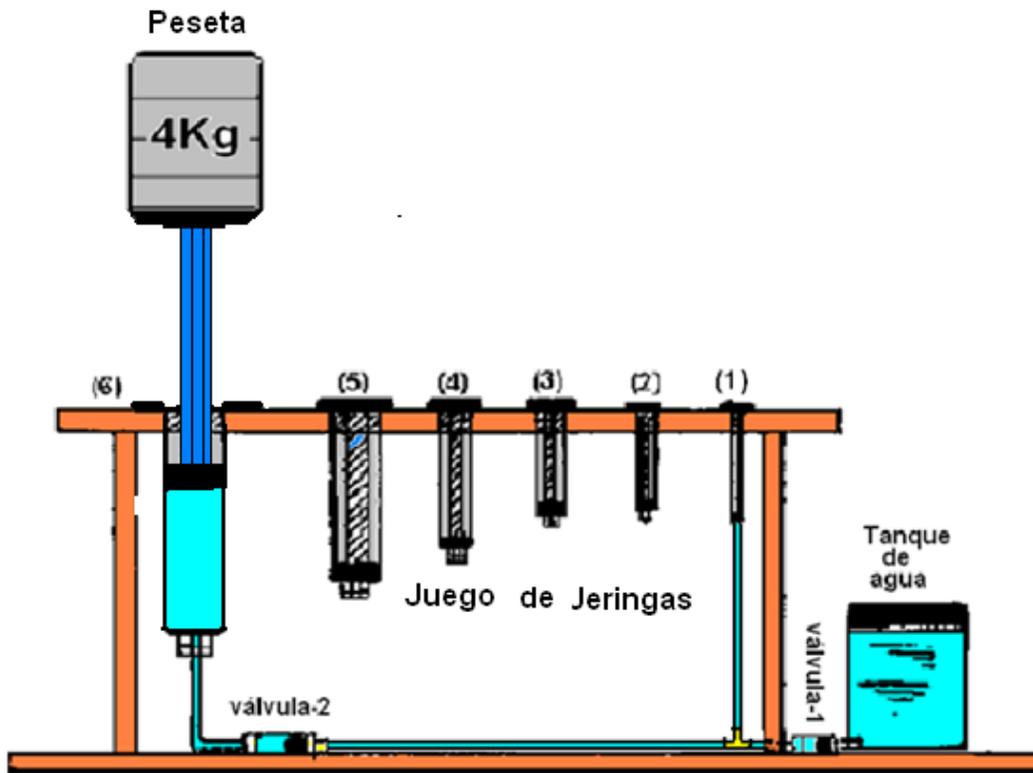
$$F_1 = 0.04 \text{ Kg}$$

La presión ejercida será:

$$P_1 = \frac{F_1}{A_1} \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{F_1}{\frac{\pi \times d_1^2}{4}}$$

$$P_1 = 4 \left(\frac{0.04 \text{ Kg}}{\pi (1.2 \text{ cm})^2} \right)$$

$$P_1 = 0.56 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

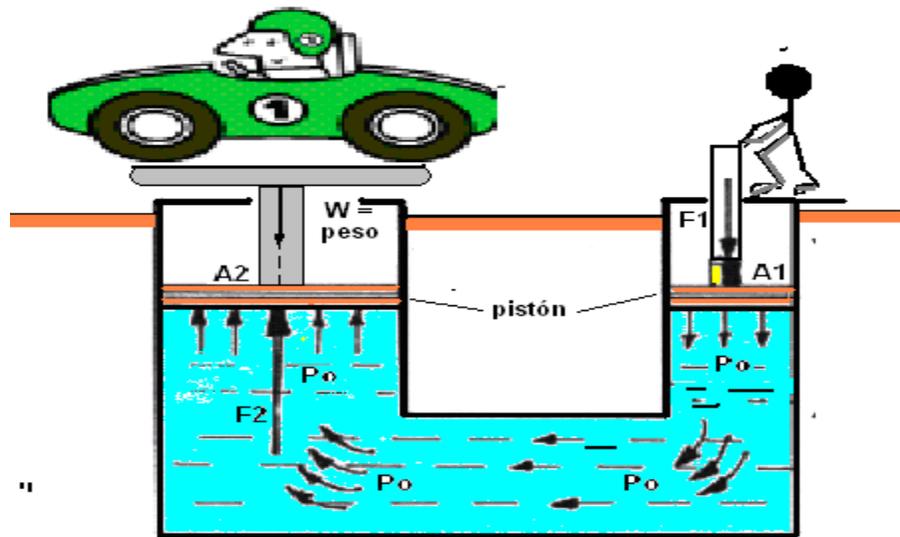


PRINCIPIOS FÍSICOS APLICADOS:

El principio físico aplicado en la experiencia del funcionamiento de la prensa hidráulica fue El Principio de Pascal, que se enuncia así: ***“La presión aplicada sobre un fluido contenido en un recipiente se transmite por igual en todas direcciones y a todas partes del recipiente, siempre que se puede despreciar las diferencias de presión debida al peso del fluido”***.

ACTIVIDAD

1.- La figura de este ejercicio muestra a un niño que levanta un automóvil con ayuda de un elevador hidráulico. El automóvil pesa 800 Kgf y descansa en un pistón cuya área es $A = 2000 \text{ cm}^2$. Determine el valor de la fuerza “ f ” que el niño esta ejerciendo, sabiendo que el área del pistón que empuja es de 25 cm^2 .



UNIDAD VI

ESTADISTICA

INDICADOR

**Representa en tablas y gráficos las
informaciones recolectadas dentro del contexto
social.**

ESTADÍSTICA

Responda

1. ¿Cuántos participantes hay en tu Centro?

R.-

2. ¿Cuántas mujeres y varones hay en tu Centro?

R.-

3. ¿Cuántos participantes aprobados habrá en el 1er. Semestre?

R.-

4. ¿Cuántos participantes reprobados habrá en el 1er. Semestre?

R.-

5. ¿Cuántos participantes retirados hay en tu Centro?

R.-

En diferentes actividades y en forma intuitiva se han venido utilizando procedimientos y datos estadísticos.

Importante

La Estadística se la define como:

Conjunto de conocimientos que se ocupa de la colección, tabulación, análisis e interpretación de datos para tomar decisiones y predecir situaciones futuras.

La estadística se clasifica en:

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA Y ESTADÍSTICA INDUCTIVA.

La Estadística descriptiva: Es cuando detalla los datos que se poseen, o describe una muestra por no ser posible obtener datos de todo el conjunto.

La Estadística Inductiva: Se logra por medio de la inferencia de muestras para llegar a generalizaciones sobre la totalidad.

Importante

Los instrumentos de medida son:

- 1. Tabulación:** Cuando se recogen datos estadísticos y se ordenan se cumple esta operación.
- 2. Variable:** Son los datos cualitativos o cuantitativos, estos últimos pueden ser continuos o discontinuos. **Continuos:** tienen valores intermedios, entre distintos valores. **Discontinuos:** cuando entre dos o tres datos existen diferencias, Ej. Libros, árboles, platos (no se puede tener medio valor).
- 3. Frecuencia.** Es el número de casos o sujetos que intervienen. Se representa por "f".

EJEMPLO: Tabular los pesos de niños de primer ciclo.

Datos.

30 kg – 32 kg – 31 kg – 40 kg – 29 kg – 31 kg – 30 kg – 41 kg

35 kg – 38 kg – 40 kg – 29 kg – 27 kg – 31 kg – 34 kg.

X: Variable cuantitativa.

f: Frecuencia.

X	F
41	1
40	2
38	1
35	1
34	1
32	1
31	3
30	2
29	2
27	1

Tabulación realizada en forma descendente.

4. Porcentaje: Es el número de frecuencias por cada cien de datos.

Ej. Es una clase de 40 alumnos aprobaron 37 y reprobaron 3.

F= de aprobados 37

F = de reprobados 3

$$P = \frac{N^{\circ} \text{ de Alumnos aprobados } \times 100}{N^{\circ} \text{ de alumnos}}$$

$$P = \frac{37 \times 100}{40} = 92.5\%$$

$$P \text{ de reprobados} = \frac{N^{\circ} \text{ de reprobados } \times 100}{N^{\circ} \text{ de alumnos}}$$

$$P = \frac{3 \times 100}{40} = 7,5\%$$

5. Intervalos: Ante un problema con gran cantidad de datos es necesario agruparlos a formar “intervalos”.

Ej.

X	F
41	1
40	2
38	1
35	1
34	1
32	1
31	3
30	2
29	2
27	1

L_s : Limite superior = 41

L_i : Límite inferior = 27

Como los datos son muchos se agrupan con intervalos de 3 (el número 3 se denomina módulo)

X	F	
41 - 39	3	
38 - 36	1	
35 - 33	2	Módulo 3 (41-40-39)
32 - 30	6	
29 - 27	3	

6. Punto Medio: Es igual a la semisuma del L_s y L_i de un intervalo.

Ej.

X	F	PM
41 - 39	3	40
38 - 36	1	37
35 - 33	2	34
32 - 30	6	31
29 - 27	3	28

7. Media Aritmética. Como su nombre lo indica es el valor medio de un conjunto de datos se obtiene promediando los mismos, se representa por \bar{x}

Ej. En la evaluación semestral un participante de superior obtuvo los siguientes puntajes:

Matemática	40
Lenguaje	38
C. Naturales	42
C. Sociales	45

La \bar{x} (media) sería igual a $\frac{40 + 38 + 42 + 45}{4}$

$$\bar{x} = 41.25$$

8. La mediana: Se obtiene agrupando los datos en forma ascendente o descendente, lo que ocupa el lugar central es precisamente la mediana.

Ej. Hallar la mediana dentro del porcentaje de asistencia registrado durante todo el curso escolar de acuerdo a los siguientes datos:

Marzo	78%
Abril	75%
Mayo	80%
Junio	65%
Julio	85%
Agosto	60%
Septiembre	72%
Octubre	82%
Noviembre	95%

Tabulación de datos en forma descendente.

Mes	X
Noviembre	95
Julio	85
Octubre	82
Mayo	80
Marzo	78
Abril	75
Septiembre	72
Junio	65
Agosto	60

Mediana: Mdn

9. Moda. Es el valor que más se repite.

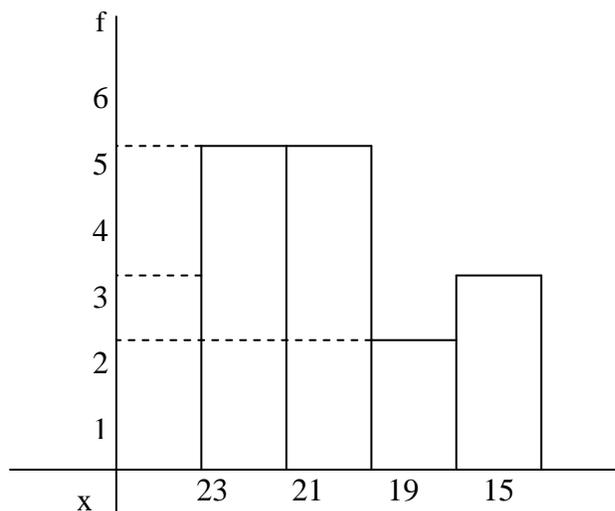
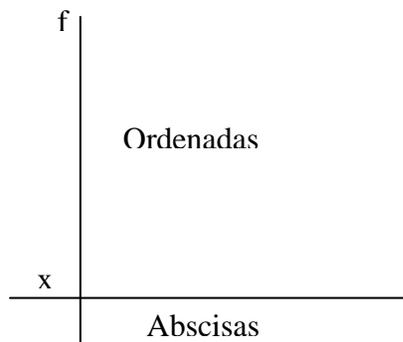
Ej. Hallar la moda en una serie de datos de estaturas de alumnos en centímetros.

Alberto	135 cm.
Diego	130 cm.
Jorge	128 cm.
Manuel	135 cm.
Luis	138 cm.
Dionisio	140 cm.
Pedro	135 cm.
Francisco	142 cm.
Juan	141 cm.
Roberto	144 cm.
José	135 cm.
Felipe	148 cm.
Carlos	147 cm.
Enrique	146 cm.
Mario	131 cm.
Eduardo	135 cm.

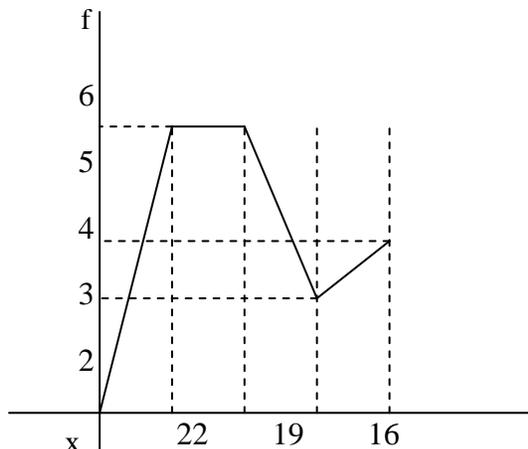
La moda es **135** correspondiente a los alumnos Alberto, Manuel, Pedro, José y Eduardo.

GRÁFICOS DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS:

- a) **El Histograma:** Para realizar esta operación debemos recurrir a las coordenadas cartesianas. En el eje de las ordenadas se ubican las frecuencias y en el eje de las abscisas las variables. Cada intervalo va a formar un rectángulo cuya base es la amplitud del mismo y la altura de frecuencia. En el ejemplo siguiente se trabajará con los datos de asistencias de alumnos en el mes de marzo.



b) Curva de Frecuencia: En el eje de ordenadas se determinan las frecuencias y en el eje de las abscisas los puntos medios de cada intervalo.



En este ejemplo también se trabaja con los datos de asistencia de alumnos en el mes de marzo.

2º Gráficos de información.

a) Gráfico de barras o de columna:

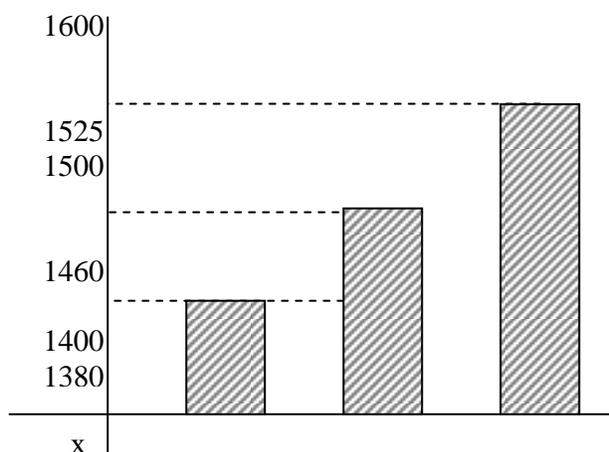
Se utiliza para representar variables cualitativas o cuantitativas.

Ejemplo: Graficar la cantidad de docentes de un distrito durante tres años:

Año: 2006 -----1380 docentes

Año: 2007 -----1460 docentes

Año: 2008 -----1525 docentes



ACTIVIDADES FINALES

1. Explique las actividades que se desarrollan en un proceso estadístico.

R.-
.....

2. Indique la diferencia fundamental que existe entre la estadística descriptiva e inferencial, en lo referente al número de elementos que se analizan en cada caso.

R.-
.....

3. Formule ejemplos de variables discretas y continuas. (2 como mínimo en cada caso)

R.-
.....

Tomando en cuenta los datos de las siguientes tablas, realice las representaciones gráficas que se piden:

No de hijos por familia	Frecuencia Abs.
0	2
1	4
2	6
3	10
4	8
5	4
6	2
Total	36

Produc. de trigo en qq	Frecuencia Abs.
10 – 20	10
20 – 30	12
30 – 40	15
40 – 50	30
50 – 60	20
60 – 70	13

4. Gráfico de Barras.

5. Histograma.